ANÁLISIS DE LA UTILIZACIÓN Y COMPRENSIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

López-Gay, R.*, Martínez Torregrosa, J.* y Gras Martí, A.**
*Dpto. de Didáctica General y Didácticas Específicas **Dpto. de Física Aplicada. U. de Alicante. Apdo. Correos, 99 03080 Alicante
Email: **rlucio@clientes.unicaja.es** **joaquin.martinez@ua.es** **agm@ua.es**

1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los antecedentes del Cálculo diferencial se remontan a la época de los griegos (Apostol, 1961, p. 6), pero el impulso definitivo para su invención tiene su origen en la necesidad de superar las dificultades matemáticas acumuladas durante los siglos XVI y XVII al intentar resolver una gran variedad de problemas. Tales problemas han sido agrupados en cuatro bloques (Aleksandrov *et al.*, 1956; Bourbaki, 1969; Glez. Urbaneja, 1992; Kline, 1972): calcular el ritmo de cambio, calcular la tangente a una curva dada, calcular valores máximos y mínimos, y calcular *sumas infinitas*. Todos ellos pueden considerarse problemas relacionados con el movimiento en su sentido más amplio, con la búsqueda de relaciones entre distintas magnitudes. En palabras de Aleksandrov *et al.* (1956): "En último término, toda ciencia natural estudia algún aspecto del movimiento. El análisis matemático es la rama de la matemática que proporciona métodos de investigación cuantitativa de los distintos procesos de cambio, movimiento y dependencia de una magnitud respecto de otras" (p. 92).

Newton y Leibniz son considerados los verdaderos creadores del Cálculo por encontrar un tratamiento general para resolver esos problemas, más allá de soluciones particulares para cada caso, y especialmente por reconocer la relación inversa entre los problemas del área y la tangente (Aleksandrov *et al.*, 1956; Glez. Urbaneja, 1992; Kline, 1972). La invención del Cálculo supuso un importante salto cualitativo en el tipo y complejidad de problemas que pudieron abordarse desde entonces. No es extraño pues que el Cálculo diferencial haya sido valorado como "el instrumento teórico más poderoso que haya sido construido jamás por los seres humanos a lo largo de su historia" (Rossi, 1997, p. 199).

Si el Cálculo diferencial ha resultado imprescindible para el desarrollo científico, y en particular para el avance en la Física, es lógico que también resulte imprescindible, a partir de ciertos niveles, en la enseñanza de la Física, cuando hayan de tratarse situaciones mínimamente complejas, más cercanas a la realidad que las tratadas en cursos elementales. El inicio en el uso del Cálculo diferencial en la enseñaza de la Física se produce en el último año de Bachillerato: el 90% de una muestra representativa de textos de Física de 3º BUP (N=12) y COU (N=15) lo usa, y el 82% de una muestra de 103 profesores de Física de COU reconocen abiertamente que necesitan el Cálculo diferencial para desarrollar la asignatura. Ya en el nivel universitario, el Cálculo está presente en la práctica totalidad de los tópicos de Física.

Esta importancia del Cálculo para el desarrollo del Física y para su enseñanza, contrasta con las conclusiones de distintos trabajos, realizados generalmente en el ámbito de la enseñanza de las Matemáticas, que ponen de manifiesto la existencia de serias deficiencias entre estudiantes, e incluso entre profesores, en relación con la comprensión de las ideas fundamentales del Cálculo (Azcárate, 1990; Breitenberger, 1992; Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992; Ferrini-Mundy y Geuther, 1991; Orton, 1983 *a* y *b*) y, más concretamente, en relación con el concepto de diferencial (Alibert *et al.*, 1987; Artigue y Viennot, 1987). Por nuestra parte, hemos comprobado el bajo porcentaje de estudiantes de Física de COU y primeros cursos de carreras científico-técnicas que usan el Cálculo diferencial en la Física sabiendo por qué y para qué hacen lo que hacen, deficiencias que se extienden también a profesores de Física y Química de Bachillerato, incluso cuando se enfrentan con ejemplos de este nivel, provocando una impotencia que es reconocida por los mismos docentes (Mtnez. Torregrosa y López-Gay, 1992, 1997 *a*; López-Gay *et al.*, 2001 *a*). En estas condiciones, resulta lógico que el uso del Cálculo diferencial -en general, el uso de las Matemáticas-, en lugar de constituir una ayuda para avanzar en la comprensión física, sea percibido por los estudiantes como un obstáculo y una fuente de rechazo hacia la Física, generador de inseguridad y ansiedad (Aghadiuno, 1992; Lavaly, 1990; Martin y Coleman, 1994; Monk, 1994).

Son muchos los trabajos que imputan estas deficiencias a una enseñanza inadecuada, de marcado carácter algorítmico, que se ocupa exclusivamente del *dominio* de reglas de cálculo, sin atender a preguntas del tipo: ¿por qué?, ¿qué significa?... (Artigue y Viennot, 1987; Ferrini-Mundy y Geuther, 1991; López, 1991; Nagy *et al.*, 1991; Orton, 1983 *a* y *b*; Schneider, 1991; Thompson, 1994; Thompson y Thompson, 1994). Este enfoque algorítmico permite, si acaso, reproducir destrezas manipulativas, pero es claramente insuficiente para resolver problemas de aplicación (White y Mitchelmore, 1996), y actúa como obstáculo para una futura comprensión conceptual (Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992). En USA, para superar la situación crítica que atraviesa la enseñanza del Cálculo, se plantea un movimiento de reforma que sustituya el enfoque algorítmico dominante por un enfoque conceptual, que se preocupe por conseguir una verdadera comprensión de lo que se hace y por qué se hace (Jhonson, 1995; Ostebee y Zorn, 1997; Swann, 1997; Tucker, 1997). En esta misma línea, los *Principles and Standards for School Mathematics* denuncian que "(...) desgraciadamente, el aprendizaje de las matemáticas *sin* comprensión ha sido durante mucho tiempo el resultado de la instrucción matemática", y afirman que "(...) en el siglo XXI, todos los estudiantes deben tener expectativas de comprender y ser capaces de aplicar las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 20).

En nuestra opinión, este cambio de enfoque debe afectar también en el uso del Cálculo diferencial en las clases de Física. Desde el dominio puramente matemático, se han realizado trabajos sobre la derivada y la integral, o sobre conceptos anteriores como el de límite o función, buscando una verdadera comprensión de lo que se hace y por qué se hace (Azcárate, 1990; Bartle, 1996; Calvo, 1998; Confrey y Smith, 1994; Ferrini-Mundy y Geuther, 1991; López, 1991; Orton, 1983 *a* y *b*; Schneider, 1992; Thompson, 1994; Turégano, 1998). Sin embargo, nuestra preocupación es distinta, pues se refiere al uso del Cálculo en el contexto físico, lo que nos ha llevado a centrar nuestro estudio en el concepto de *diferencial*, que es habitualmente relegado en la enseñanza de las Matemáticas, mientras que, por el contrario, es muy utilizado en los razonamientos y *matematización* de situaciones físicas desde los últimos años del Bachillerato, ya sea en los desarrollos teóricos o en la resolución de problemas, donde, desde los razonamientos iniciales, aparecen expresiones como: $\mathrm{d}x=v\cdot\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}p=F\cdot\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}W=F\cdot\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}V=E\cdot\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}F=B\cdot I\cdot\mathrm{sen}?\cdot\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}N=-?\cdot N\cdot\mathrm{d}t$, etc.

El objetivo de nuestro trabajo ha sido, pues, analizar el uso habitual del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física, comprender el origen de las posibles deficiencias, y plantear propuestas alternativas. Previamente, ha sido necesario determinar cuáles son los aspectos relevantes que guiarán nuestro análisis, de acuerdo con nuestra intención de mejorar el uso del Cálculo. Para ello, hemos realizado un estudio histórico y epistemológico de la evolución del Cálculo diferencial, en particular del concepto de diferencial, buscando los obstáculos que tuvieron que ser superados, las preguntas que necesitaron respuesta y los cambios que fue necesario introducir (Mtnez. Torregrosa *et al.*, 1994). Hemos realizado también una clarificación de lo que se hace cuando se usa el Cálculo diferencial en las clases de Física, identificando sin ambigüedad cuál es el problema que hace necesario recurrir al Cálculo, cuál es la estrategia general que se utiliza para resolverlo, y cuál es el significado de los distintos conceptos y relaciones dentro de dicha estrategia. Una vez identificado en qué consiste una adecuada comprensión del Cálculo diferencial en la Física, hemos podido analizar con racionalidad su uso habitual y planificar una enseñanza alternativa (Mtnez. Torregrosa y López-Gay, 1992, 1993, 1997 *a* y *b*; Mtnez. Torregrosa *et al.*, en prensa; Gras Martí *et al.*, 2001; López-Gay *et al.*, 2001 *a* y *b*).

En este artículo resumiremos las principales conclusiones de ese estudio histórico y la clarificación *problematizada* que hemos realizado. Presentaremos también las conclusiones del estudio experimental que hemos llevado a cabo para analizar en qué medida están presentes en la enseñanza habitual los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial en la Física.

2. CONCEPCIONES *HISTÓRICAS* SOBRE LA DIFERENCIAL

Desde el nacimiento del Cálculo hasta el siglo XX, el concepto de diferencial se debatió entre su identificación con las cantidades infinitamente pequeñas y su reducción a una expresión subordinada, carente de significado propio. Siguiendo la categorización usada por Alibert *et al.* (1987), hemos identificado dos concepciones *históricas* representativas de esta evolución: la *diferencial de Leibniz* y la *diferencial de Cauchy*. En este apartado se describirán brevemente las características de ambas concepciones, guiados por nuestro objetivo de entender mejor el uso habitual de la diferencial en la enseñanza de la Física.

2.1. La diferencial de Leibniz

El concepto de diferencial ocupaba un lugar central en la estructura original del Cálculo, y constituía el instrumento de partida para abordar los problemas físicos. Dada una magnitud física (y), Leibniz definía la diferencial (dy) como una variación infinitesimal de esa magnitud: una variación no nula pero más pequeña que cualquier número conocido o, en términos dinámicos, una variación que podía hacerse tan pequeña como se quisiera. Newton usaba este mismo concepto bajo el nombre: “momento de y”. Se trataba de un instrumento de aproximación: si hubiese podido tomar valores *macroscópicos*, la diferencial nunca coincidiría con ?y, sin embargo, en el rango de lo infinitesimal acababa confundiéndose con el incremento, de forma que, en ese rango, dy podía sustituir al ?y sin cometer error.

Este nuevo concepto permitía definir y calcular lo que hoy conocemos como derivada e integral:

- La derivada de la función $y(x)$ se definía como un cociente, el “último” de los cocientes que podía alcanzarse a partir de cocientes de incrementos finitos (?y/?x), donde ya los incrementos (?y, ?x) se podían sustituir por diferenciales (dy, dx). Para calcular la derivada, se partía de un desarrollo del ?y (a veces completo, y otras como una serie infinita de términos), se despreciaban algunos de los términos de ese desarrollo y se sustituía entonces ?y por dy, y a partir de aquí se calculaba el cociente dy/dx.
- En cuanto a la integral, se definía como la suma de *infinitos* incrementos infinitesimales, tan pequeños cada uno de ellos que, aunque no se conociese ?y, podía aproximarse por dy sin cometer error alguno y, por tanto, el resultado obtenido tampoco tendría error, de forma que podía obtenerse e ?y a partir de expresiones sólo aproximadas (dy), asegurando: ?dy=?y.

Sin embargo, el uso de estos incrementos aproximados, que en el rango de lo infinitesimal podían sustituir a los incrementos exactos sin cometer error alguno, no escapó a la crítica ni fue aceptado de forma unánime, contrariamente a la imagen de *rigor y exactitud desde el principio* que los textos de Matemáticas y Física suelen transmitir. Se cuestionaba que fuese legítimo despreciar cantidades, por muy pequeñas que fuesen, si su valor no era cero, y por tanto las conclusiones que se apoyaban en este razonamiento eran también cuestionadas; parecía violarse el *principio de identidad* según el cual no existe un estatuto intermedio entre la igualdad y la diferencia para dos entes matemáticos, lo que llevaba a George Berkeley a concluir: “no pueden obtenerse proposiciones verdaderas de principios falsos” (citado por Rossi, 1997, p. 204).

Estas críticas no sólo afectaban sólo a las bases teóricas del uso del nuevo Cálculo, sino también a su punto más fuerte: los resultados. Siguiendo estrictamente los mismos pasos, a veces se obtenían resultados ciertos y otras resultados falsos, claramente absurdos (ver uno de estos resultados propuesto por Torricelli en el siglo XVII, en: Schneider, 1991). Ello mostraba que la sustitución de los incrementos, en el rango de lo infinitesimal, por aproximaciones, no siempre era acertada: *la idea intuitiva de que la suma de infinitos “trocitos” infinitamente pequeños dará lugar al trozo grande deseado sin importar la “forma” de los trocitos, fallaba en muchas ocasiones*. Lo peor era que no se sabía explicar por qué ocurría esto, ni se podía por tanto establecer qué requisito debía cumplir la diferencial, más allá de su carácter de aproximación, para poder llegar a un resultado correcto.

Newton y Leibniz, incapaces de superar esas críticas, intentaron abandonar el uso de las cantidades infinitesimales: “en Matemáticas no se deben despreciar ni los errores más diminutos”, decía Newton en sus últimos trabajos, mientras Leibniz decía no creer “en magnitudes verdaderamente infinitas o verdaderamente infinitesimales” (citados por Kline, *op. cit*., pp. 480 y 511), lo que no impedía que los usara por una cuestión meramente práctica, amparado en la fecundidad de los resultados. En referencia a esta época, Eves (1981) afirma: "atraídos por la potente aplicabilidad del asunto, careciendo de una verdadera comprensión de los fundamentos sobre los que debe apoyarse, los matemáticos manipulaban los procesos analíticos de una manera casi ciega, a menudo guiados por una ingenua intuición de que lo que hacían debía ser válido" (p. 134).

2.2. La diferencial de Cauchy

La justificación rigurosa del Cálculo llegó, casi dos siglos después de su creación, de la mano del matemático francés Cauchy, quien, a partir de un mejor conocimiento del concepto de límite y del conjunto de los números reales, formuló una definición precisa de la derivada y la integral, y un procedimiento no ambiguo para calcularlas. La derivada se definió como el límite de un cociente de incrementos; la integral, reducida en la práctica a la operación inversa de la derivación, recuperó con Cauchy el importante papel que había jugado durante la primera mitad del siglo XVII y se definió como el límite de una serie de sumas. Para el cálculo de ambas, se partía de una relación entre incrementos, aunque fuese aproximada, y después se calculaba el límite de un cociente o de una suma. En estas nuevas definiciones no aparecía, ni resultaba necesaria, la diferencial.

Por otra parte, Cauchy definió la cantidad infinitesimal como una variable cuyo valor numérico decrece indefinidamente, de manera que converge hacia el límite cero (Cauchy, 1821, pp. 26-27). Como esta definición es satisfecha por el incremento de cualquier función continua, no tiene sentido utilizar el término diferencial para referirse al incremento (infinitesimal) de una función. Si a esto se añade la sospecha acumulada a lo largo de los años sobre la diferencial y los infinitesimales de servir de base a tratamientos matemáticos poco rigurosos, el terreno resultaba claramente abonado para que la diferencial quedase relegada a un papel marginal en el nuevo marco teórico del Cálculo: "Diferenciales inútiles pueden ser despedidas de inmediato. Si d*y*, d*x* aparecen sólo en la combinación d*y*/d*x* o bajo el signo integral después del integrando, la pregunta sobre qué significan individualmente d*x*, d*y* es equivalente a preguntarse qué significan 'l', 'o', 'g' en 'log'" (Freudenthal, 1973, p. 550).

Aunque no era necesaria en la nueva estructura conceptual del Cálculo, Cauchy definió la diferencial como una expresión construida *a partir* de la derivada: $\mathrm{d}f=f'(x)\cdot\mathrm{d}x$ -siendo d*x* un incremento arbitrario de la variable-, y sólo servía para justificar y abreviar ciertas demostraciones. Esta concepción subordinada de la diferencial, aunque despejaba la ambigüedad y cumplía las exigencias del rigor matemático, no resultaba satisfactoria en el contexto de las aplicaciones físicas, donde las expresiones diferenciales -que carecían de significado físico propio para los seguidores de Cauchy- siguieron constituyendo el punto de partida intuitivo para resolver la mayor parte de los problemas (como instrumento de aproximación).

Como puede apreciarse, el rigor adquirido por el Cálculo en el siglo XIX, la "descolonización" y "vuelta a la cultura aborigen" a la que se refiere de manera exagerada Aghadiuno (1992), trajo consigo también un divorcio entre Física y Matemáticas. Ese divorcio se refleja aún hoy en la distinta perspectiva sobre la diferencial: en Matemáticas es un instrumento formal que ocupa un papel marginal, en Física es un instrumento de aproximación, una cantidad muy pequeña, que ocupa un lugar central (Artigue, 1986; Artigue y Viennot, 1987).

2.3. Algunas relaciones entre las concepciones *históricas* y el uso de la diferencial en la enseñanza

Nuestra propia experiencia, como la de muchos otros profesores y estudiantes que han cursado asignaturas de Física y Cálculo, nos ha mostrado que esta ruptura histórica se refleja en la enseñanza: en las clases de Matemáticas se presenta el Cálculo cercano a la formulación de Cauchy, sin prestar atención al concepto de diferencial, mientras en las clases de Física se utiliza el Cálculo más cercano a la concepción de sus creadores, aunque en una versión más refinada. Esa experiencia nos permite adelantar que, en las clases de Física:

- La diferencial se identifica con un incremento infinitesimal y, aunque no siempre se hace explícito, se utiliza como un instrumento de aproximación que sólo tiene sentido en el rango de lo infinitesimal, donde puede sustituir al incremento sin error alguno. Por ejemplo, la diferencial de la posición ($\mathrm{d}\mathbf{r}$), aunque en términos macroscópicos no corresponde a ningún desplazamiento (? *e*), se piensa que puede identificarse con el desplazamiento ocurrido en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño (d*t*) sin cometer error alguno. Del mismo modo, se piensa que la diferencial del trabajo (d*W*), aunque en términos macroscópicos no corresponde a la variación del trabajo (? *W*)[1] experimentada durante un desplazamiento (? *e*), puede identificarse con la variación del trabajo durante un desplazamiento infinitamente pequeño (d*e*) sin cometer error alguno.

- Aunque la derivada se introduce, al estilo de Cauchy, como el límite de una sucesión formada por cocientes de incrementos, después en la práctica se identifica con uno de los términos de esa sucesión, el último, aquél en el que los incrementos son ya tan pequeños que pueden sustituirse por diferenciales. Por ejemplo, la rapidez instantánea se define como el límite de las rapideces medias, pero a continuación se identifica con la rapidez media correspondiente a un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, tan pequeño que los desplazamientos (? *e*) e intervalos de tiempo (? *t*) se sustituyen por diferenciales de posición (d*e*) y de tiempo (d*t*) sin cometer error alguno.
- La integral es definida como el límite de una serie de sumas de incrementos, al estilo de Cauchy, pero también es interpretada como el último término de esa serie, aquél en el que los sumandos son ya tan pequeños que pueden sustituirse por diferenciales. Por ejemplo, el cálculo de la variación del trabajo (? *W*) realizado por una fuerza variable en un desplazamiento (? *e*) podría realizarse a partir de la suma de trabajos infinitesimales en los cuales puede despreciarse el error cometido al utilizar la expresión: d*W*=*F*·d*e*, de forma que la suma de todos esos trabajos acabará conduciendo al resultado exacto, sin cometer error alguno.

Estos conceptos y razonamientos, similares a los utilizados por Leibniz, resultarán familiares a cualquiera que haya estudiado o explicado Física. A fuerza de usarlos de forma repetida, incluso habrán escapado a cualquier crítica; sin embargo, es posible expresar también, aunque con palabras más familiares, las mismas críticas que entonces se formularon:

- Si d*y* es un aproximación del ? *y* producido por ?*x*, nunca coincidirán d*y* e ? *y*, por muy pequeño que sea el ?x. Por tanto, siempre existirá un error asociado a la sustitución de ? *y* por d*y*, aunque sea en el rango de lo infinitesimal. Para evitar esta crítica no es posible recurrir a la idea de límite como un proceso sin fin, como hace algún texto de Física General al escribir: $dy = \underset{?x \to 0}{lím}\ ?y$, pues entonces d*y* sería cero, siempre que *y*(*x*) fuese continua.

[1] Si *W* es el trabajo realizado hasta la posición *e*, ? *W* será el trabajo realizado desde *e* hasta *e*+? *e*

- Si dy nunca coincide con $?y$, entonces el cociente dy/dx no coincide con ninguno de los cocientes $?y/?x$, por muy pequeño que sea el $?x$. Es decir, la igualdad: $y'=dy/dx$ no se verifica porque dy sustituya a $?y$ muy pequeño, sino por alguna otra condición que será necesario hacer explícita
- Si dy nunca coincide con el $?y$, ninguna suma de dy coincidirá con $?y$, por muy pequeño que sea el error cometido en cada sumando; conviene advertir que, conforme se disminuye el error de cada sumando, se aumenta a la vez el número de los mismos, obteniendo al final una indeterminación del tipo: $8 \cdot 0$. No debe extrañar que se obtengan resultados erróneos, que acumulan un error no nulo, aplicando este razonamiento (ver, por ejemplo, el cálculo del área de la superficie de una esfera en: Artigue y Viennot, 1987). Así pues, la igualdad: $?dy=?y$ no se verifica porque dy sustituya a $?y$ muy pequeño, sino por alguna otra condición que será necesario precisar.

En definitiva, si la diferencial no es un incremento infinitesimal, ni es una aproximación que puede sustituir al incremento en el rango de lo infinitesimal, ¿cuál es entonces su significado?, ¿cuál es la causa que permite considerar a la derivada como un cociente de diferenciales, o que permite asegurar que la integral de una diferencial conduce al resultado exacto?, ¿cómo escoger la expresión diferencial adecuada en cada situación?

El uso habitual de la diferencial en las clases de Física escapa a estas críticas y objeciones apoyándose en la idea intuitiva, aunque equivocada, de que en el rango de lo muy pequeño los incrementos exactos se confunden con sus aproximaciones, de forma que los errores acabarán siempre desapareciendo. Se apoya también en algunas visiones incorrectas del concepto de límite ya señaladas en distintos trabajos (Cottrill *et al.*, 1996; Ferrini-Mundy y Geuther, 1991; Lauten *et al.*, 1994; Orton, 1983 *a* y *b*; Sánchez y Contreras, 1998; Schneider, 1992; Williams, 1991). Todo ello se mantiene gracias al uso mecánico y algorítmico del Cálculo, en el que no se cuestiona la justificación y el significado de lo que se hace, sino que se acepta una expresión diferencial de partida (como si no hubiese otra posible, o como si el resultado no se viese aceptado por cuál se escogiese) y a continuación se concentra todo el esfuerzo en una correcta aplicación de las reglas.

¿Cómo salir al paso de estas críticas sobre la concepción de la diferencial que habitualmente se usa en la Física? El cambio de la concepción de Leibniz por la concepción de Cauchy no es ninguna respuesta, pues ¿cómo escribir una expresión diferencial para empezar a estudiar una situación física concreta, si se le vacía de cualquier significado? Las expresiones diferenciales, en Física, no pueden ser unos simples instrumentos sin significad. Resulta necesario reconciliar, por un lado, la estrecha vinculación con las situaciones físicas de las expresiones diferenciales de Leibniz y Newton, y, por otro, el rigor y la precisión de su significado, evitando la contradicción descrita por Freudenthal (*op.*

cit., p. 553): "Es una situación imposible que el matemático enseñe unas Matemáticas que no pueden ser aplicadas y el físico aplique unas Matemáticas que no pueden ser enseñadas por el matemático".

Con esta intención, nos hemos enfrentado con el uso del Cálculo diferencial en las clases de Física de Bachillerato y primeros cursos universitarios, procurando dar sentido y significado a todo lo que se hace, cuestionando lo que hasta ahora se nos ha presentado como obvio. El resultado ha sido una clarificación *problematizada*, basada en la concepción de diferencial introducida por el matemático francés Frèchet en 1911 (citada textualmente por Artigue, 1989, p. 34), quien destacó que su definición recuperaba la idea original de aproximación, pero escapando a las objeciones de rigor que muy justamente se le habían hecho. Teniendo en cuenta que esta aportación se produjo en el contexto del Análisis Funcional, muy alejado del problema que nos interesa, presentaremos la definición de Frèchet -adaptada al caso de funciones de una variable- como conclusión de la clarificación *problematizadora*, en el contexto del uso del Cálculo en las aplicaciones físicas.

3. SIGNIFICADO Y UTILIDAD DE LA DIFERENCIAL EN LA FÍSICA (BASADO EN LA DEFINICIÓN DE FRÉCHET)

Comenzaremos caracterizando las situaciones físicas cuya solución requiere el uso del Cálculo diferencial, presentaremos una posible estrategia general para abordarlas, y la pondremos en práctica resaltando cómo el desarrollo con éxito de dicha estrategia sólo es posible cuando los conceptos introducidos cumplen unas relaciones determinadas, que delimitan con precisión su significado.

3.1 ¿Cuál es el problema que hace necesaria la invención de la diferencial?, ¿qué estrategia se utiliza para resolverlo?

El problema general que subyace en toda situación física que requiere el uso del Cálculo diferencial es encontrar la expresión *en forma de función* que relaciona dos magnitudes físicas: x e y, obteniendo así la *función incógnita*: $y(x)$. Si se conoce una condición inicial: $y(x_1)=y_1$, el problema es equivalente a averiguar el ?y producido por un cambio de variable desde x_1 hasta x_1+?x (ver fig. 1).

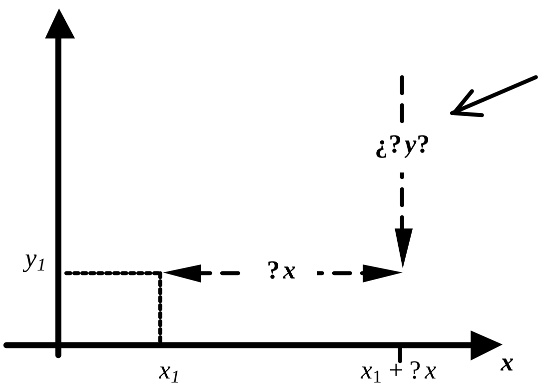


Figura 1. ¿Cuál es el valor de ?y correspondiente a ese ?x?

Por ejemplo, ¿cuál es la variación de rapidez de un móvil (? v) producida en un cierto intervalo de tiempo (? t)?, ¿cuál es la variación de intensidad (? I) que experimenta una onda plana al atravesar un medio de espesor ? x?, ¿cuál es la variación de energía potencial de un muelle (? E) cuando se estira una distancia ? x?, ¿cuánto varía la presión atmosférica (? P) al ascender una altura ? h?

El punto de partida más sencillo es *suponer* que la gráfica es una recta, es decir, que la relación que liga ? y con ? x es lineal: ? y=k·? x Cuando el conocimiento y análisis físico de la situación, incluyendo la contrastación experimental, confirma esa dependencia, el problema está resuelto en su aspecto matemático, y sólo falta obtener el valor del parámetro k. Pero, en la mayoría de las situaciones, el análisis físico muestra precisamente que el comportamiento real no es de tipo lineal, es decir, que el coeficiente k no es constante en el intervalo ?x, sino que varía con x: $k(x)$. ¿Qué valor de k debe tomarse en estos casos?, ¿cómo avanzar en el objetivo de hallar $y=f(x)$, descartando el *ensayo y error*? Por ejemplo: si la aceleración tangencial varía con el tiempo, la fuerza depende del estiramiento o la densidad del aire varía con la altura, ¿cómo hallar el Δv en un intervalo Δt, la variación de la energía potencial elástica al estirar Δx, o el cambio de presión, ΔP, que se producirá al variar la altura Δh?

La estrategia para alcanzar nuestro objetivo en situaciones no lineales está basada en lo que Dieudonné (1960, p. 145) considera la idea fundamental del Cálculo: la aproximación de funciones cualesquiera por medio de funciones lineales. En el cuadro 1 se resumen los principales pasos de esa estrategia:

Cuadro 1. Posible estrategia para hallar la relación funcional –una vez que sabemos que no es lineal- entre ?*y* y ?*x*, a partir de funciones lineales

1. Realizar una estimación del valor de ? y a partir de x_1, y para un ? x, suponiendo que la función tiene un comportamiento lineal a partir de ese x_1 y durante todo el intervalo ? x (¡que puede ser tan grande como se quiera!). Representaremos esta estimación lineal por: dy=k·? x (donde k es constante desde x_1 hasta x_1+? x)

2. El error cometido al realizar esta estimación (? y-dy=? y-k·? x) dependerá del valor de ? x (*en general*, para un valor dado de k, el error será menor cuanto menor sea ? x) y del valor de k (que puede ser cualquiera, es decir, es posible cualquier pendiente de la recta).
Si dividimos el intervalo ? x en N subintervalos de valor dx_i=x_{i+1}-x_i (es igual que un ? x_i, pero así la expresión diferencial adquiere simetría), podemos mejorar la aproximación del ? y calculando la estimación lineal del ? y_i correspondiente a cada dx_i: dy_i=k_i·dx_i (k_i se mantiene constante en ese dx_i) y sumando las estimaciones parciales: ? y˜ ? dy_i.
Esa aproximación mejora disminuyendo el valor de cada dx_i, es decir, aumentando el valor de N. Si queremos realizar la estimación para cualquier N, hemos de disponer de un valor de k para cada x, pasando así de un conjunto discreto de k_i a una función: $k(x)$. La *calidad* de la aproximación dependerá del valor de N y de la $k(x)$ elegida.

3. Cambiando el valor de *N* se obtiene una serie de estimaciones totales del ? *y*, y una serie de *errores totales*. El límite de la serie de estimaciones, cuando *N*? 8 , será exactamente ? *y* si, y sólo si, el límite de la serie de *errores totales* cuando *N*? 8 , es cero.

Esto no ocurrirá necesariamente para cualquier función $k(x)$, aunque ? x_i? 0 (este era el error que llevaba a resultados absurdos en la concepción de Leibniz). Pero, si podemos encontrar la función $k(x)$ que hace que eso ocurra, el problema quedará resuelto: habremos obtenido la función incógnita $y=f(x)$ a partir del límite de una suma de estimaciones lineales de pendiente $k(x)$.

La puesta en práctica de esta estrategia nos mostrará con claridad el significado y la relación que debe existir entre los distintos conceptos para que tenga éxito, es decir, para que permita resolver el problema planteado: encontrar la relación entre ? *y* e ? *x*.

3.2. ¿Cuál es el significado y la relación entre los distintos conceptos para que esa estrategia permita resolver el problema?

1. Aunque sabemos que ? *y* no es lineal respecto a ? *x*, podemos realizar una estimación de su valor, suponiendo que la función tiene un comportamiento lineal (es una recta), es decir, su pendiente es constante en el intervalo (¡que no es infinitesimal!) ? *x*: d*y*=*k*·? *x*. Así pues, estamos *seguros* que d*y* no coincide con ?*y:* representa lo que variaría la función desconocida en un ? *x*, a partir de x_1, si lo hiciera linealmente con una pendiente *k* (ver fig. 2).

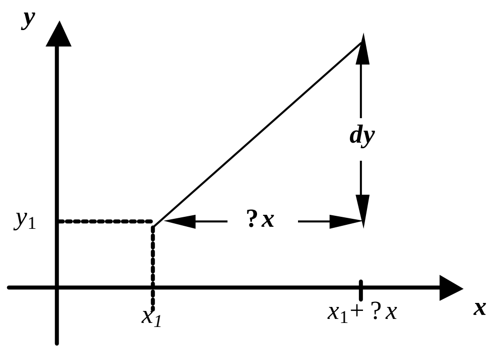


Figura 2. d*y* es una estimación del ? *y*, lineal respecto al ? *x*

No obstante, existen infinitos valores posibles para la pendiente *k*, es decir, infinitas estimaciones lineales (ver fig. 3). ¿Cualquiera de ellas es válida o sólo hay una que permita resolver el problema (hallar el valor exacto de Δ*y*)?

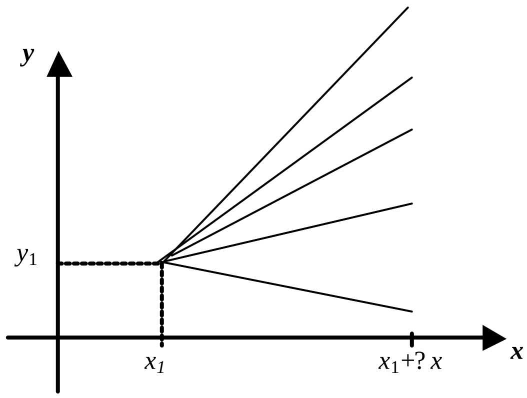


Figura 3. Para un valor dado, x_1, existen infinitas funciones lineales que permiten estimar el valor de ?y para un ?x

2. *En general*, cuanto menor sea el ?x, el error cometido mediante la estimación diferencial es menor, pues la suposición: *k se mantiene constante* se acerca más al comportamiento real. Por ello, una mejora de la estimación consiste en dividir el intervalo ?x en N subintervalos (cuyo tamaño denominaremos dx_i), calcular la estimación dy_i correspondiente a cada subintervalo y después sumar. Como esa partición del intervalo completo puede ser cualquiera, no sólo nos interesa conocer el valor de la diferencial a partir de x_1 y para todo el intervalo, sino a partir de cualquier x y para todo dx. La diferencial es, por tanto, una función de dos variables (x,dx) cuya expresión será: dy=$k(x)\cdot$dx

La mejora de la estimación que se ha realizado se expresa: ?$y \approx \sum_{i=1}^{N} dy_i = \sum_{i=1}^{N} k_i \cdot dx_i$ (ver figs. 4 y 5).

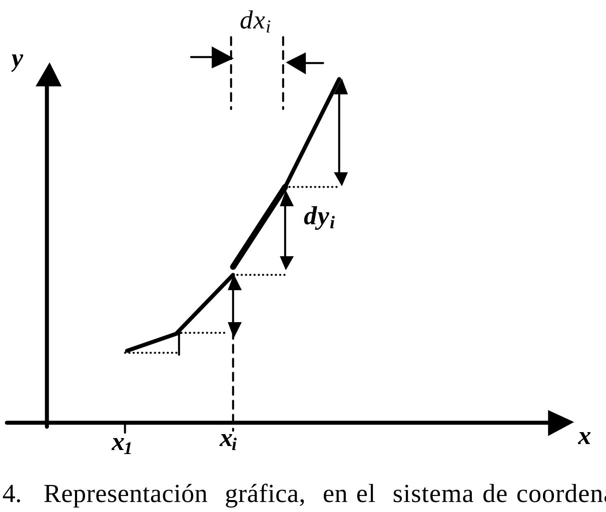


Figura 4. Representación gráfica, en el sistema de coordenadas y-x, del intento de mejora de la estimación del ?y mediante el cálculo de dy consecutivas. $k(x_i)$ es la pendiente del segmento más grueso (dy_i/?x_i). La suma de todos los segmentos verticales es una estimación del ?y.

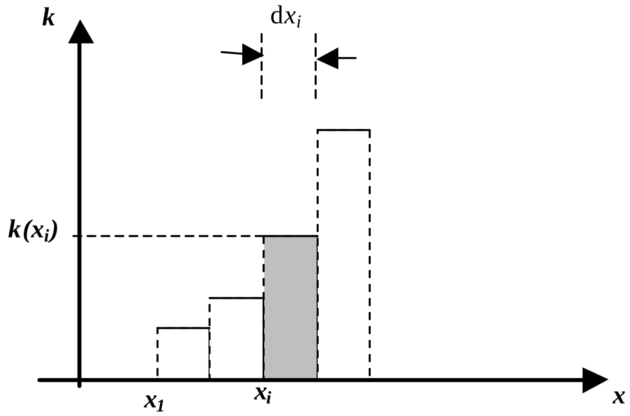


Figura 5. Representación, en el sistema de coordenadas k-x, del intento de mejora de la estimación del Δy mediante el cálculo de dy consecutivas. dy_i=$k(x_i)$·?x_i es el área del rectángulo rayado. La suma del área de todos los rectángulos es una estimación del Δy.

Esa suma de estimaciones lineales no es igual a Δy: se comete un error total que es la suma de los errores parciales. Llamando e_i a cada error parcial cometido: (?y_i-dy_i) (poniéndonos en el peor de los casos, consideraremos que todos tienen el mismo signo) y ***error total*** a la suma de esos errores parciales, entonces:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{N} \left(dy_i + e_i\right) = \sum_{i=1}^{N} dy_i + \left(error\, total\right) \qquad \text{ec. (1)}$$

Cada error parcial e_i depende del valor de ?x_i (determinado por el número N de subintervalos) y del correspondiente $k(x_i)$. Por tanto, el error total depende de N y $k(x)$.

Para una función $k(x)$ determinada, dando distintos valores a N se obtiene una serie de estimaciones globales y su correspondiente serie de ***errores totales***. Ninguno de los términos de esta última serie será nulo, pues e_i es siempre distinto de cero por muy grande que sea N, ya que el comportamiento seguirá siendo no lineal por muy pequeño que sea el intervalo ?x_i. Tampoco tiene que ser necesariamente cero el límite de esa serie cuando N tiende a infinito, aunque -ahora sí- *existe la posibilidad* de que así ocurra (el límite es un *objeto nuevo* que no tiene por qué coincidir con ninguno de los términos de la serie), dependiendo de qué comportamiento sea dominante: el del número de sumandos (N) que se hace cada vez mayor, o el de cada sumando (e_i) que se hace cada vez menor.

Aclarada esta *posibilidad*, el límite de la serie de sumas de estimaciones $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} dy_i$ (que recibe el nombre de integral y se representa por $\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} dy$) será exactamente ?$y$ si, y sólo si, el límite de la serie correspondiente de ***errores totales*** es cero. Como el límite de esa serie depende de la función $k(x)$ elegida, el problema quedará resuelto si sabemos encontrar la función $k(x)$ que hace que el límite de la serie de ***errores totales*** sea cero.

3. Sea cual sea la estimación lineal de partida, siempre se cumplirá que el límite de cada error parcial $(?y_i\text{-}dy_i)$ será cero; sin embargo, la condición que buscamos es más exigente: que sea cero el límite del *error total*, lo que nos permitirá seleccionar una de entre todas las estimaciones lineales posibles. Lo que garantiza que el límite del *error total* sea cero es que el límite de N veces cualquiera de los errores parciales sea cero. Es decir:

$$\int_{x_1}^{x_1+?x} dy = ?y \quad si,\ y\ sólo\ si: \quad \lim_{N\to\infty} N\cdot(?y - dy) = 0 \quad \forall x$$

Como N y dx son inversamente proporcionales (si los subintervalos son iguales: N=? x/dx), entonces:

$$\int_{x_1}^{x_1+?x} dy = ?y \quad si,\ y\ sólo\ si: \quad \lim_{dx\to 0} \frac{?y - dy}{dx} = 0 \quad \forall x$$

El límite de una resta es la resta de los límites, y además el cociente dy/dx es constante para cada x, pues debe recordarse que dy es una estimación lineal respecto a dx. Por tanto:

$$\int_{x_1}^{x_1+?x} dy = ?y \quad si,\ y\ sólo\ si: \quad \lim_{dx\to 0}\left(\frac{?y}{dx}\right) - \frac{dy}{dx} = 0 \quad \forall x$$

Como dx es el tamaño del subintervalo, el cambio de variable, el único límite que aparece en esa expresión es la definición de derivada:

$$\int_{x_1}^{x_1+?x} dy = ?y \quad si,\ y\ sólo\ si: \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad \forall x$$

Conclusión: para que una estimación lineal: $?y ˜ k(x)\cdot dx$ sea la diferencial, debe cumplir que su pendiente: $k(x)$ coincida con la función derivada: $y'(x)$, lo que permitirá llegar al resultado exacto aplicando la estrategia del Cálculo.

En la búsqueda de solución al problema, ha quedado establecida con claridad la relación inversa entre integración y derivación, lo que constituye el Teorema Fundamental. Para resolver una integral del tipo: $?k(x)\cdot dx$, basta identificar el integrando con una diferencial: $k(x)\cdot dx = dy$:

$$\int_{x=a}^{x=b} k(x)\cdot dx = \int_a^b dy = ?y \quad si,\ y\ sólo\ si: \quad y' = \frac{dy}{dx} = k(x) \quad \forall x$$

3.3. ¿Qué es la diferencial?, ¿cuál es, en cada caso, la expresión diferencial?

Como vemos, es dentro de esta estrategia global del Cálculo donde la diferencial, la derivada y la integral definida, así como las relaciones entre ellos, adquieren un significado claro y justificado. A modo de resumen, podemos afirmar que la **diferencial de una magnitud (y) respecto de otra (x)** es la única función lineal del incremento ($dy=k(x)\cdot dx$), la única estimación lineal del $?y$, que permite obtener la relación exacta entre $?y$ y $?x$ *vía* integral, y para ello su pendiente, $k(x)$, debe coincidir con la función derivada: y'. Lo característico de la diferencial no es pues su valor grande o pequeño, ni tampoco su posible coincidencia con el incremento, algo que nunca ocurre (a no ser que el comportamiento sea realmente lineal).

Por ejemplo, la diferencial de la posición respecto al tiempo: de a partir de un instante t y para un intervalo dt, representa lo que variaría la posición en ese intervalo si lo hiciera uniformemente, es decir, con rapidez constante; de puede tomar cualquier valor, grande o pequeño, dependiendo de t y dt. Al estudiar la dependencia de la presión atmosférica con la altura, la diferencial de la presión respecto a la altura: dP a partir de una altura h y para un intervalo $?h$ (o dh) significa lo que variaría P, desde h hasta $h+?h$, si lo hiciera linealmente respecto a $?h$, es decir, si la presión cambiase lo mismo cada metro que se asciende; dP puede tomar cualquier valor, dependiendo de h y dh.

Hemos superado así la concepción de Leibniz, pero en lugar de hacerlo vaciando de significado físico a la diferencial, como lo haría Cauchy, la *clarificación* que hemos realizado, según una lógica *problematizada*, nos ha llevado a mantener la idea intuitiva de aproximación, definiendo la diferencial como una estimación lineal del incremento, pero eliminando la condición superflua de infinitesimal, y añadiendo tan sólo una condición destinada a garantizar que esa estimación de partida permita obtener finalmente la relación funcional buscada: $?y=f(?x)$.

¿Cómo se sabe que la estimación lineal de partida, correspondiente a una situación física, satisface la condición exigida a la diferencial? Es decir, dadas dos magnitudes físicas y, x cuya relación no es lineal, ¿cómo se sabe cuál es la expresión adecuada correspondiente a un hipotético comportamiento lineal?

En ocasiones la respuesta a esta pregunta es sencilla. Esto ocurre cuando conocemos la relación entre $?y$ y $?x$ en unas condiciones particulares en las que sabemos que es de tipo lineal: $?y=k\cdot?x$, y queremos después generalizar al caso en que k varía con x; en estos casos, podemos asegurar *a priori* cuál es la expresión diferencial. Por ejemplo, sabemos que la relación entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo cuando la rapidez es constante es: $?e=v\cdot?t$; cuando la rapidez no es constante en ese $?t$ no podemos usar esa expresión, pero podemos asegurar que la expresión diferencial correspondiente es: d$e=v\cdot$dt, pues esa estimación del $?e$ representa lo que se desplazaría si la rapidez se hubiese mantenido constante. Del mismo modo, el $?W$ realizado a partir de la posición e y durante un desplazamiento $?e$, cuando la fuerza tangencial resultante es constante, se calcula: $?W=F\cdot?e$; cuando la fuerza tangencial no es constante durante ese $?e$, no podemos usar esa expresión, pero podemos asegurar que la expresión diferencial va a ser: d$W=F\cdot$de, pues esa estimación del $?W$ representa el trabajo que se realizaría si F se mantuviese constante a partir de la posición e.

Pero, en muchas otras ocasiones, en las aplicaciones físicas no se conoce previamente la relación entre $?y$ y $?x$ en un caso particular en que es lineal. En estas ocasiones, es necesario avanzar *a título de hipótesis*, apoyados en el análisis y conocimiento físico de la situación, una estimación lineal del $?y$ respecto al $?x$, *suponer* que es la estimación diferencial, y obtener el resultado global al que conduce (la *función incógnita*) que sí es contrastable (experimentalmente o por su coherencia con el cuerpo de conocimientos en que se inserta el problema). Así, por ejemplo, si queremos hallar cómo varía la intensidad, *I*, de una onda plana al atravesar un medio, es decir *I(x)*, siendo *x* la distancia atravesada por la onda en el interior del medio, desconocemos *I(x)* y, por supuesto, también su derivada. Podemos, no obstante, formular hipótesis razonables sobre los factores que influirán en el ? *I* producido al atravesar una distancia ?*x*, y concretarlas en una estimación lineal del ? *I*. En este caso, por ejemplo, cabe esperar que ΔI dependa de la naturaleza del medio atravesado, de ? *x* y del valor de la intensidad (a mayor intensidad mayor absorción por el medio, en un mismo ?*x*); este análisis restringe fuertemente el número de estimaciones lineales candidatas a ser la diferencial, pero todavía hay un gran número de ellas que se ajustan a este análisis: $dI=-a\cdot I\cdot dx$, $dI=-a\cdot I^2\cdot dx$, $dI=-a\cdot dx/x$, etc. Aunque algunas puedan rechazarse porque no resisten otras condiciones, como por ejemplo las condiciones de contorno (cuando $x=0$ la dI no puede ser infinita para cualquier dx), al final debe seleccionarse una a título de hipótesis. La expresión elegida conducirá, *vía* integral, a una expresión funcional de ? *I* o –si se conoce una condición de contorno- de $I=f(x)$, que puede ser sometida a prueba, lo que permite aceptarla o no y, en consecuencia, aceptar o no la expresión diferencial seleccionada. Lamentablemente, en los libros de texto no aparecen estas consideraciones sobre la naturaleza hipotética de la diferencial, transmitiendo una falsa e incomprensible sensación de seguridad *a priori*. No es infrecuente, incluso, encontrar expresiones del tipo "(..) se comprueba *experimentalmente* que $dI = ...$"

La clarificación que hemos presentado no sólo da sentido al uso del cálculo en las aplicaciones físicas, no sólo precisa el significado de los conceptos y relaciones entre ellos como respuesta al problema general planteado, sino que, además, vincula estrechamente el uso del Cálculo diferencial con el análisis físico de la situación. Para mostrar en qué medida esto es posible, y profundizar al mismo tiempo en la clarificación que hemos pretendido mostrar, hemos incluido en un Anexo un problema físico resuelto aplicando la nueva concepción de la diferencial, tal como lo hacemos con alumnos de Bachillerato.

4. INDICADORES DE UNA COMPRENSIÓN ADECUADA DE LA DIFERENCIAL EN EL ÚLTIMO CURSO DE BACHILLERATO Y PRIMER CURSO UNIVERSITARIO

El estudio histórico y la clarificación que acabamos de presentar, siguiendo una lógica *problematizada*, nos permite avanzar de un modo fundado cuáles serían los indicadores de una comprensión adecuada del concepto de diferencial en el campo de la Física en los niveles de Bachillerato y primeros cursos universitarios (ver cuadro 2). Esos indicadores han orientado la formulación de nuestra primera hipótesis y la elaboración del diseño experimental para ponerla a prueba.

Cuadro 2. Indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial y su uso

1. **Saber cuándo y por qué se hace necesario su uso,** es decir, conocer cuál es el problema que hace insuficiente el cálculo ordinario. En concreto, saber que es necesario recurrir a la diferencial cuando queremos hallar el ? *y* producido en un ? *x*, y la relación entre Δy e Δx no es lineal.

2. **Conocer la estrategia que utiliza el Cálculo para resolver ese problema** y comprender el sentido de los distintos pasos que se recorren. En concreto:

   2.1. Saber explicar con precisión y sentido físico el significado de las expresiones diferenciales, reconocer sin ambigüedad que la diferencial puede tomar valores numéricos e interpretar el significado de los mismos.

   2.2. Conocer y justificar la relación que existe entre la diferencial (*dy*) y la derivada (*y'*): $y' = \dfrac{dy}{dx}$, y aceptar sin ambigüedad los razonamientos en los que se utiliza esa relación.

   2.3. Conocer el significado de la integral y saber justificar el denominado Teorema Fundamental, es decir, por qué la integral definida requiere el cálculo de *antiderivadas* o funciones primitivas

   2.4. Utilizar con sentido esa estrategia en situaciones y problemas en los que se domine el contenido físico de los mismos.

3. **Ser consciente de la naturaleza hipotética**, tentativa, en casi todas las situaciones físicas, de la expresión diferencial de partida, y saber que la validez de esa hipótesis no puede ser contrastada directamente sino a través del resultado al que conduce.

4. **Valorar positivamente** el papel de la diferencial en el aprendizaje de la Física. Este componente axiológico debería ser una consecuencia natural cuando se comprende el papel crucial que juega la diferencial en el tratamiento de situaciones físicas de interés.

5. ANÁLISIS DEL USO HABITUAL DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA: HIPÓTESIS, DISEÑO EXPERIMENTAL Y RESULTADOS.

5.1. Enunciado y justificación de la hipótesis

Desde nuestro punto de vista, parece lógico suponer que las posibles deficiencias en la comprensión de la diferencial por los alumnos tienen su origen en el ámbito escolar y que, por tanto, dichas deficiencias podrán ser consideradas como un reflejo de aquello que libros y profesores saben y dicen (Artigue y Viennot, 1987). La hipótesis, pues, desde la que hemos realizado el análisis afirma que: ***la enseñanza habitual del concepto de diferencial (introducción y utilización del mismo) adolece de varias carencias que afectan a su comprensión por los alumnos en el contexto de la Física, generando actitudes negativas hacia la Física y su aprendizaje.*** Las deficiencias que se presuponen en esta hipótesis se refieren a todos y cada uno de los indicadores recogidos en el cuadro 2.

La reflexión sobre nuestra experiencia acumulada, a la luz de la clarificación que hemos presentado en un apartado anterior, nos lleva a pensar en la ausencia generalizada de esos indicadores, mientras los estudiantes adquieren una sensación de comprensión basada en la idea intuitiva, aparentemente acertada, de que cualquier aproximación, en el rango de lo infinitesimal, puede llegar a sustituir al incremento exacto sin cometer error alguno.

Estas deficiencias encuentran su apoyo, además, en las conclusiones de muchos trabajos que ponen de manifiesto la baja calidad de la enseñanza del Cálculo, caracterizada por un enfoque algorítmico y un claro desprecio hacia los aspectos más comprensivos y conceptuales, lo que provoca una escasa comprensión de estudiantes y profesores de las ideas fundamentales del Cálculo (Azcárate, 1990; Breitenberger, 1992; Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992; Ferrini-Mundy y Geuther, 1991; López, 1991; Orton, 1983 *a* y *b*; Schneider, 1991; Thompson, 1994; Thompson y Thompson, 1994; White y Mitchelmore, 1996) y, más concretamente, en relación con el concepto de diferencial (Alibert *et al.*, 1987; Artigue y Viennot, 1987).

Cabe añadir, además, que el hecho de tratarse de un contenido de otra asignatura que se utiliza en las clases de Física dificulta aún más un uso del mismo con comprensión (Artigue, 1986; Monk, 1994; Parker, 1994), lo que ha llevado a foros como el de la Unesco o el de la sección editorial del *Journal of Research in Science Teaching* se hacen eco de estos problemas y recomiendan hacer esfuerzos por coordinar el currículo y la instrucción de las asignaturas de Ciencias y Matemáticas así como promover la investigación relativa al aprendizaje de las Matemáticas y los conceptos físicos (Good, 1991; Unesco, 1975).

5.2. Diseño experimental para someter a prueba la hipótesis

La ausencia de los indicadores de una adecuada comprensión del uso de la diferencial en la enseñanza y aprendizaje habitual de la Física debería reflejarse en la forma de actuar y en lo que saben y dicen los profesores y estudiantes, así como en el contenido de los libros de texto. Hemos obtenido así tres derivaciones de la hipótesis: una referida a los profesores, otra a los estudiantes, y una tercera a los libros de texto. Esta última derivación será objeto de presentación detallada en otros trabajos, por lo que en adelante nos centraremos en las dos primeras.

En la tabla 1 se muestra la operativización que hemos realizado en un total de catorce consecuencias directamente contrastables (P1-P7, E1-E7) que nos permitan valorar la existencia de esos indicadores de una adecuada comprensión entre los profesores y estudiantes.

Tabla 1. Consecuencias directamente contrastables referidas a los profesores y estudiantes

Una adecuada comprensión y uso de la diferencial supondría...	**CONSECUENCIAS: Sin embargo, profesores y estudiantes....**
Saber cuándo y por qué se hace necesario su uso	**P1–E1.** Escriben directamente expresiones diferenciales cuando resuelven problemas, sin justificar su uso, y aplican mecánicamente el Cálculo incluso en situaciones en las que no es necesario hacerlo. Tampoco saben identificar, ante situaciones físicas concretas, la causa que obliga a pasar de una expresión incremental a la expresión diferencial. **(C1ep, C5e, P)**
Saber explicar con precisión y sentido físico el significado de las expresiones diferenciales, reconocer que la diferencial puede tomar valores numéricos e interpretar el significado de los mismos.	**P2-E2.** No explican el significado de las expresiones diferenciales que ellos mismo escriben cuando resuelven problemas de Física, y cuando se les pregunta directamente por el significado de expresiones diferenciales no le asignan un significado específico, tan sólo en ocasiones las identifican con un incremento *muy pequeño*, sin mencionar la idea de estimación. **(C1ep, C3ep, C5p, C7e, P)** **P3-E3.** Tienen dificultades para calcular valores numéricos concretos de la diferencial, e incluso para admitir distintos valores numéricos. No saben explicar el significado de algún valor numérico concreto de la diferencial. **(C2ep, C3ep)**
Conocer y justificar la relación que existe entre la diferencial y la derivada: $y'=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, y aceptar sin ambigüedad los razonamientos en los que se utiliza esa relación.	**P4-E4.** Aunque han usado con frecuencia razonamientos en los que interviene la idea de la derivada como cociente de diferenciales, tienen dificultades para reconocer verbalmente esta relación e incluso para aplicarla en el cálculo de diferenciales a partir de un valor conocido de la derivada. **(C3ep, C6e)**
Conocer el significado de la integral y saber justificar el Teorema Fundamental, es decir, por qué la integral definida requiere el cálculo de *antiderivadas* o primitivas	**P5-E5.** Aunque conocen el concepto de integral como *sumas de Riemann*, cuando lo usan se limitan a su mecánica de cálculo, evitando así justificar por qué el cálculo de las *sumas* se realiza mediante *antiderivadas*. Cuando se les pide directamente esa justificación, no aportan ningún argumento, tan sólo enuncian supuestas *evidencias*. **(C4ep, P)**
Utilizar con sentido la estrategia del Cálculo en situaciones y problemas en los que domine el contenido físico de los mismos	**P6-E6.** El uso del Cálculo en la Física se limita a la aplicación mecánica de reglas, lo que provoca dificultades para utilizarlo en situaciones novedosas, y da lugar a unas bajas expectativas sobre la posibilidad de que el Cálculo sea usado con sentido. **(C6p, C7p, C8e, P)**
Valorar positivamente el papel de la diferencial en el aprendizaje de la Física	**P7-E7.** Perciben el uso del Cálculo diferencial como un obstáculo más que como una ayuda, y lo identifican como una fuente de actitudes negativas hacia la Física. **(C6p, C7p, C8e)**

No hemos incluido ninguna consecuencia sobre la naturaleza hipotética de la diferencial (indicador 3, cuadro 2), pues consideramos que esta idea está muy alejada de las concepciones habituales, y nos limitaremos a confirmar su ausencia en los libros de texto.

Para someter a prueba esas consecuencias hemos preparado un amplio y variado conjunto de instrumentos, tanto por su formato como por el contenido físico que tratan. Para cada instrumento hemos elaborado también una plantilla de análisis. En total, los instrumentos son:

- once cuestiones cerradas o semiabiertas (C)
- cuatro problemas, con notas aclaratorias sobre los conceptos físicos implicados, que deben resolver incluyendo comentarios y aclaraciones cada vez que se usa el Cálculo diferencial (P).
- un problema *ejemplificador* que los profesores debían resolver como si estuviesen impartiendo una clase para alumnos de COU, prestando especial atención al uso del Cálculo diferencial (P)
- una entrevista individual semiestructurada con estudiantes y profesores en formación: tomando como base un problema resuelto por un estudiante-tipo, el entrevistador pregunta sobre lo que hace y por qué lo hace en distintos momentos de esa resolución.

Cada consecuencia será probada por más de un instrumento, lo que aumenta la fiabilidad de los resultados. Al final de cada consecuencia, en la tabla 1, se indican los instrumentos (C, P) que serán utilizados para someterla a prueba. El análisis de las entrevistas se utilizará para ilustrar y confirmar la interpretación de los resultados obtenidos mediante respuestas escritas.

La muestra elegida está formada por un total de 210 profesores de Secundaria y 732 estudiantes, cada uno de los cuales contestó a varias cuestiones y problemas. Los profesores, todos de Física y Química y en activo, son asistentes a un curso de formación que hemos impartido sobre el uso del Cálculo diferencial en la Física, en seis provincias distintas. Los estudiantes cursan la asignatura de Física en COU (270) en seis institutos de dos provincias y con siete profesores distintos, primer curso de carreras científico-técnicas (283) o cursos superiores de la carrera de Ciencias Físicas o Ciencias Químicas (184) en cuatro universidades y con un total de nueve profesores distintos. La entrevista individual se ha llevado a cabo con siete estudiantes de COU y cuatro profesores en formación.

Los cuestionarios se pasaron a los estudiantes en el mes de mayo, durante la clase de Física, para asegurar que habían recibido formación suficiente y representativa del curso en que se encontraban.

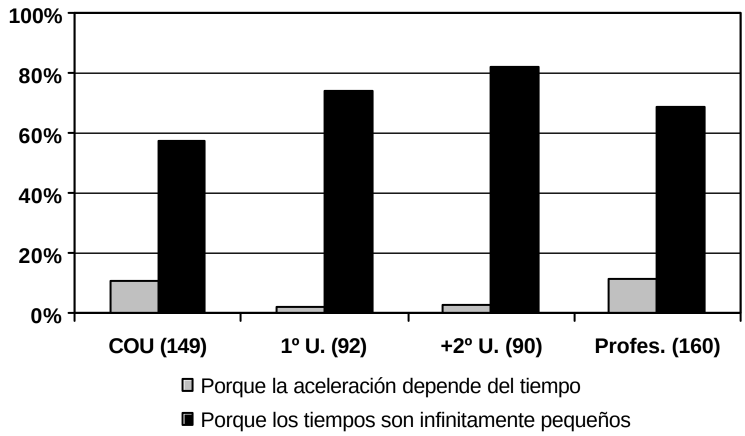
5.3. Resultados

Para evitar la dispersión, en lugar de presentar los resultados obtenidos con cada instrumento particular, se presentarán los resultados más relevantes agrupados en torno a cada uno de los indicadores de una adecuada comprensión.

Resultados que muestran que los profesores y estudiantes no saben cuándo y por qué es necesario usar la diferencial

En la cuestión de opción múltiple C1ep tenían que señalar cuál es la razón que mejor justifica el paso de la expresión: $?v=a\cdot ?t$ a esta otra expresión: $dv=a\cdot dt$. Más del 88% de profesores y estudiantes no saben cuál es la verdadera razón que obliga a realizar ese paso (que la aceleración depende del tiempo). Tal como esperábamos, la respuesta incorrecta más frecuente para justificar ese paso consiste en referirse al valor infinitamente pequeño del intervalo de tiempo. En el gráfico 1 se recogen los porcentajes de los distintos grupos de la muestra que señalan cada una de esas respuestas.

Gráfico 1. ¿Por qué se escribe $dv=a\cdot dt$?



Cuando resuelven problemas de Física cuyo contenido físico ya han estudiado (a pesar de lo cual el enunciado incluye notas aclaratorias para recordar), y en los que se les pide expresamente que escriban comentarios destinados a aclarar el uso del Cálculo diferencial, el 86% de los profesores (N=94) y más del 95% de los estudiantes (N=257) no incluyen comentario alguno para justificar, aunque sea erróneamente, por qué lo utilizan.

Cuando los profesores resuelven un problema sencillo *en situación de clase*, tal como lo harían con sus alumnos de COU, el 65% no dedica ni una frase a intentar justificar el uso del Cálculo diferencial.

Estos y otros resultados muestran con rotundidad la falta de comprensión de los profesores y estudiantes sobre las razones que obligan a usar expresiones diferenciales, y la falta de atención que prestan a este aspecto cuando usan el Cálculo para resolver problemas, aunque se trate de niveles de enseñanza en los que se inicia el uso del Cálculo diferencial.

Los siguientes extractos de entrevistas muestran esta falta de comprensión, refiriéndose siempre a supuestos valores muy pequeños o a posteriores desarrollos matemáticos para justificar el uso de la diferencial:

Extracto 1. María, profesora en formación

María: *Ha convertido los incrementos en diferenciales, y no sé por qué hace ese paso. Lo que yo no entiendo es por qué un incremento directamente no lo sustituye. Ha pasado de incrementos a diferencial... No sé por qué pasa a diferenciales.*

Extracto 2. Javier, profesor en formación

Javier: *Ha hecho lo mismo que antes: los incrementos de masa y de volumen que son finitos los ha pasado a diferenciales que son... infinitesimales*

E: ¿Por qué los pasa a diferenciales?

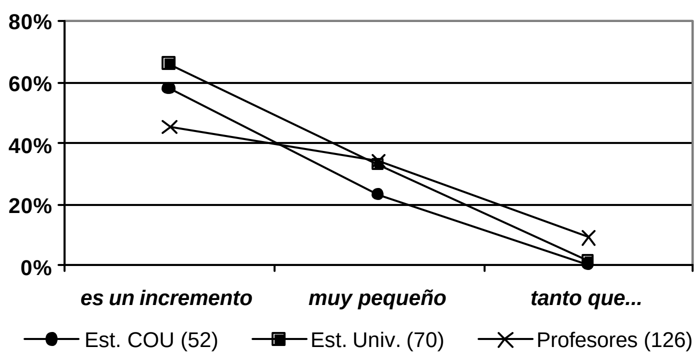
Javier: *Para hacer la integral*

Resultados que muestran que los profesores y estudiantes no conocen el significado correcto de la diferencial

Después de contextualizar y presentar brevemente la ley de las desintegraciones radiactivas, hemos pedido a los estudiantes que expliquen el significado físico de la expresión: $\mathrm{d}N=-?\cdot N\cdot \mathrm{d}t$ Hemos hecho lo mismo con los profesores, pero con la expresión que se utiliza para calcular el campo magnético creado por una corriente eléctrica rectilínea e indefinida: $\mathrm{d}B=(\mu\cdot I\cdot \mathrm{sen}?/4\mathrm{p}r^2)\cdot \mathrm{d}l$, o con la expresión de cinemática: $\mathrm{d}v=a\cdot \mathrm{d}t$ Los resultados se muestran en la tabla 2.

Salvo un 2% de los profesores, nadie explica correctamente el significado de las expresiones diferenciales en términos de estimación lineal del incremento El 45% de los profesores, el 42% de los estudiantes de COU, y el 34% de los universitarios, deja la respuesta en blanco. El resto responde incorrectamente, identificando la diferencial con el incremento, aunque con distinto grado de precisión y explicación. En el gráfico 2 hemos acumulado las repuestas incorrectas (no en blanco): todos *identifican diferencial con incremento*, una parte precisa que *ese incremento debe ser muy pequeño*, y una pequeña parte de ellos añade *debe ser tan pequeño para suponer constante alguna magnitud*.

Gráfico 2. Respuesta errónea (no en blanco) sobre el significado de la diferencial



Como ya hemos adelantado, pensamos que la concepción dominante en el contexto de la Física identifica la diferencial con un incremento infinitesimal. Estas expectativas no se apoyan sólo en nuestra experiencia personal: es la única concepción que aparece en los textos de Física y en las respuestas de alumnos y profesores en el conjunto de las cuestiones que les hemos pasado. ¿Por qué no aparece entonces con tanta nitidez cuando se les pregunta sobre el significado de la diferencial? Creemos que es un reflejo de la falta de reflexión, lo que provoca inseguridad e impide que se exprese lo que se piensa como *conocimiento declarativo*: si es posible recurrir al uso de reglas, más vale no expresar algo débilmente asumido.

El análisis de los problemas resueltos confirma la existencia de esta actitud inhibitoria sobre el significado de la diferencial: menos del 10% de los profesores y estudiantes dedica aunque sea una línea a explicar el significado cuando resuelven problemas, a pesar del requerimiento explícito de comentarios y aclaraciones. Resulta alarmante que el 60% de los profesores no incluyan ninguna explicación cuando resuelven un problema en situación de clase con la intención de *clarificar físicamente* entre los alumnos de COU el uso del Cálculo diferencial.

Los siguientes extractos de entrevistas muestran que la concepción de diferencial como cantidad infinitesimal coexiste con una actitud mecánica que se resiste a declarar o precisar tal concepción.

Extracto 3. Isa, alumna de COU de *alto rendimiento*

Isa: *Yo sé que haciendo la integral se quita la* "d"*, pero no sé ningún significado ahora*

Extracto 4. Juan, alumno de COU de *alto rendimiento*

Juan: (...) *(*d*m) son trocitos muy "chiquitillos" de la...*

Juan: (...) *Cada vez que usamos diferenciales, mi profesor dice: "para estudiar esta curva vamos tomando rectas tan pequeñas como queramos..."*

Juan: *dV, dh son incrementos de volumen, incrementos de altura... parece que lo toma así*

E: ¿Y tú crees que es así?

Juan: *No lo tengo muy claro... La verdad, yo sé hacer integrales, pero no me he quedado muy bien con lo que son las diferenciales que aparecen, lo veo escrito pero no sé lo que son... y para qué voy a preguntar si me van a decir: "esto son los trocitos chiquititos..."*

Resultados que muestran que los profesores y estudiantes usan de forma operativista y sin comprensión la relación entre derivada y diferencial

Aunque en Matemáticas se enseña la derivada como el *límite de un cociente incremental* y se simboliza por *y'*, en las clases de Física se interpreta la derivada como un *cociente diferencial* y se simboliza por: d*y*/d*x*. Este paso se produce sin ninguna reflexión o explicación previa, de forma que el aprendizaje se produce a través de la repetición mecánica de reglas que responden al esquema: $y'=L \Rightarrow \mathrm{d}y=L\cdot\mathrm{d}x$, o bien: $\mathrm{d}y=L\cdot\mathrm{d}x \Rightarrow y'=L$ Como consecuencia, cabe esperar que se utilicen esas reglas en un contexto operativo, pero no se comprenda lo que se está haciendo.

La cuestión C6e tenía dos partes: no se entregaba la segunda hasta haber recogido la primera. La primera parte era una cuestión cerrada, de opción múltiple, en la que tenían que señalar la lectura correcta de la expresión: $\mathrm{d}R/\mathrm{d}z=L\cdot z$. La segunda parte era otra cuestión de opción múltiple en la que tenían que señalar la lectura correcta del razonamiento: "$\mathrm{d}R/\mathrm{d}z=L\cdot z$, despejando $\mathrm{d}R$ se obtiene: $\mathrm{d}R=L\cdot z\cdot\mathrm{d}z$".

Mientras sólo el 12% de los estudiantes de primer curso universitario (N=50) leen correctamente la expresión $\mathrm{d}R/\mathrm{d}z=$... como un cociente de diferenciales, después el 90% consideran, en la segunda parte, que es correcto despejar $\mathrm{d}R$ de esa expresión (y el 76%, además, lo lee en términos diferenciales). Esto refleja el predominio del operativismo frente a la comprensión: al enfrentarse con un razonamiento que se repite con frecuencia en los textos y clases de nivel universitario, contestan aceptando implícitamente la derivada como cociente; sin embargo, cuando se les pregunta por esta idea sin referencia directa a una regla mecánica de cálculo, no la aceptan. El siguiente extracto de entrevista ilustra esta contradicción, aunque en este caso el entrevistado es un alumno de COU:

Extracto 5. David, alumno de COU de *alto rendimiento*

E:	¿Puedes leer esta expresión con tus propias palabras: $\mathrm{d}m/\mathrm{d}V=$...?
David:	*Diferencial de masa con respecto al volumen, a la variación del volumen... No dividido entre el diferencial de volumen, no, no, eso no es así*
E:	¿Está bien despejar $\mathrm{d}m$?
David:	*Pues sí, está bien*
E:	Pero, ¿no acabas de decir que $\mathrm{d}m/\mathrm{d}V$ no es una división?
David:	*¡Ah!, bueno, pero eso no quiere decir nada. Eso de ahí (despejar* $\mathrm{d}m$*...) lo verifica la división, y el producto es igual*
E:	Pero entonces: ¿esta expresión es $\mathrm{d}m$ entre $\mathrm{d}V$ o no?
David:	*¡Ah! ¡Ya! Ahora sí, es verdad, me has pillado. No debería, pero no sé...*

Cuando se analizan las respuestas que dan a esa misma cuestión el grupo de estudiantes de COU (N=40), se aprecia un alto grado de coherencia entre las respuestas a la primera parte y a la segunda: el 37.5% lee la expresión $\mathrm{d}R/\mathrm{d}z$ como cociente de diferenciales, y ese mismo porcentaje considera que es correcto despejar $\mathrm{d}R$ de esa expresión. Esta coherencia puede ser debida a la menor frecuencia con que los estudiantes de COU han usado la regla a la que se hace referencia en la segunda parte.

Resultados que muestran que los profesores y estudiantes no saben por qué se calcula la integral mediante la antiderivada o función primitiva (Teorema Fundamental)

Nuestra experiencia docente nos ha mostrado que, en las clases y textos de Física, se identifica la integral con una *suma de muchos (o infinitos) términos* (una versión poco rigurosa de la *integral de Riemann* en la que no se destaca suficientemente que, en realidad, *es el límite* de una serie de sumas, y *no es* ninguno de los términos de esa serie). Sin embargo, cuando los profesores y estudiantes -desde COU hasta los últimos cursos universitarios- resuelven problemas de Física en los que se requieren comentarios y aclaraciones sobre el uso de Cálculo diferencial, sólo en casos aislados intentan explicitar esta concepción de integral, y sólo el 50% de los profesores lo intenta cuando resuelven un problema *ejemplificador* en situación de clase. Interpretamos este resultado como una muestra más del uso operativo: lo que se retiene y se enseña *de verdad* es la mecánica de cálculo, pero no el concepto.

El análisis de los problemas resueltos muestra, además, que ningún profesor ni estudiante aporta argumento alguno que justifique el Teorema Fundamental, ni siquiera en el problema *ejemplificador*. No se trata sólo de que hayan adoptado un enfoque algorítmico en dicha resolución. Cuando les hemos pedido expresamente, después de recordar brevemente el contenido del Teorema, que escriban argumentos gráficos y/o analíticos, o razonamientos intuitivos, que muestren que ese resultado -en especial el hecho de que aparezca la *función primitiva*- es lógico y comprensible, ni uno sólo del total de profesores (N=34) y estudiantes (56 de COU, 67 universitarios) consigue justificar el Teorema; en el mejor de los casos, un porcentaje inferior al 10% de profesores llega a identificar el producto $f(x)\cdot dx$ con dP, cuando aún restaría por demostrar que la integral de dP es precisamente ? P.

Estos y otros resultados nos permiten afirmar que los profesores y estudiantes utilizan la integral en las clases de Física como *suma de muchos términos*, aunque la actitud fuertemente operativista oculta esta idea bajo un conjunto de algoritmos. Además, no saben por qué el cálculo de esas *sumas* se realiza mediante reglas inversas a las de derivación. Los siguientes extractos de entrevistas ilustran esta conclusión:

Extracto 6. Javier, profesor en formación

Javier: *Una integral es una suma de diferenciales, suma de todas las pequeñas masas...*

E: (Después de mostrarle la resolución de la integral) ¿Por qué sale este resultado?

Javier: *Por la fórmula*

E: ¿Por qué el cálculo de una suma se realiza con esa fórmula?

Javier: *Había algo de una inversa de la derivada...*

E: ¿Por qué la suma de muchas cosas se reduce al cálculo de la inversa de la derivada?

Javier: *Nunca he sabido por qué*

Extracto 7. David, alumno de COU de *alto rendimiento*

E: ¿Qué significa esa integral? (le señala: $\int dm$)

David: *Estamos sumando cosas pequeñas... esa cosa pequeña que es la diferencial*

E: (Después de mostrarle el resultado de la integral) ¿Por qué para calcular la integral busco algo que al derivar me da el integrando?, ¿por qué la suma de muchos $h \cdot dh$ es algo que al derivarlo me da h?

David: *La pregunta la entiendo, yo la respuesta la tengo clara pero no tengo ningún argumento teórico, no sé explicarlo sino que es un " mecanicismo".*

E: ¿Qué relación hay entre el concepto de suma y esa regla mecánica que tú dices?

David: *No sé decirlo, no sé...*

Extracto 8. Juan, alumno de COU de *alto rendimiento*

E: Pero, ¿por qué?

Juan: *No lo sé, porque son así las matemáticas. No sé lo que es una integral, pero sé resolverla.*

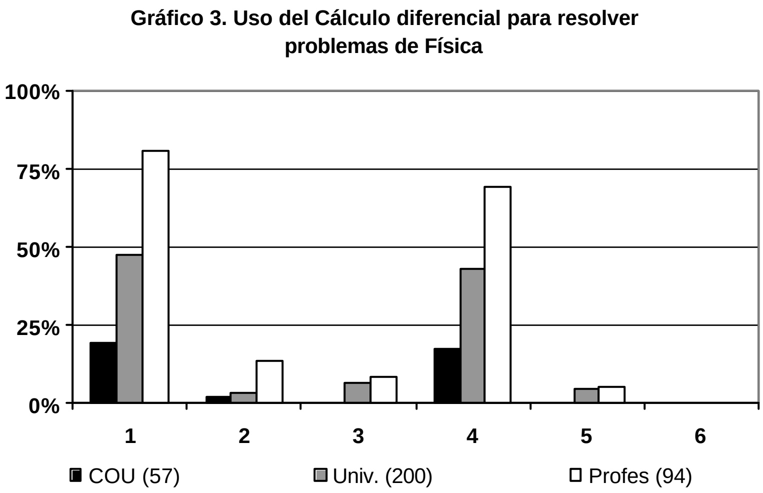
Resultados que muestran que profesores y estudiantes limitan el uso del Cálculo a la aplicación mecánica de reglas, y tienen bajas expectativas sobre la posibilidad de usarlo con sentido

El conjunto de los resultados que se han presentado hasta aquí muestran con claridad el uso mecánico del Cálculo diferencial en las clases de Física, lo que es reconocido por los propios profesores y estudiantes cuando se les pide expresar su grado de acuerdo con una serie de afirmaciones mediante una escala tipo Likert. Así, el 60% de los profesores admite o está claramente de acuerdo con que, *en realidad, lo importante es que los alumnos sepan obtener derivadas e integrales de algunas funciones sencillas*. Por su parte, el 75% de los estudiantes universitarios de asignaturas de Física admiten o están claramente de acuerdo con que *lo único que es necesario saber en la asignatura de Física sobre el Cálculo diferencial es resolver las derivadas e integrales que aparecen en algunas fórmulas.*

Como consecuencia de este uso mecánico, los profesores y estudiantes tienen graves dificultades para utilizar el Cálculo diferencial -aunque sea de forma equivocada- con seguridad y sentido ante nuevas situaciones. Este extremo aparece con claridad cuando se analizan los problemas de Física resueltos por profesores y estudiantes (con la petición expresa de comentarios y aclaraciones): en el gráfico 3 se presentan los resultados más llamativos, agrupados en las siguientes categorías:

1. Usa el Cálculo diferencial
2. Intenta justificarlo (aunque sea erróneamente)
3. Asigna algún significado a la diferencial (aunque sea incorrecto)
4. Escribe integrales
5. Considera explícitamente la integral como suma de muchos términos

6. Justifica de alguna manera el teorema Fundamental



Es llamativo que más de la mitad de los estudiantes no usa el Cálculo diferencial, a pesar de que conocían e objetivo de nuestra investigación y se les pedían comentarios y aclaraciones. Los profesores y estudiantes que usan el Cálculo diferencial lo hacen, por regla general, de forma mecánica: los porcentajes bajan drásticamente en las categorías referidas a justificaciones o explicaciones.

Todo ello afecta, lógicamente, a las expectativas de profesores y estudiantes sobre las posibilidades de llegar a entender y usar con seguridad el Cálculo en situaciones novedosas. Son esclarecedoras y rotundas las respuestas de los profesores de Física de Bachillerato (N=92): el 99% admite que los alumnos de COU tienen graves deficiencias en la comprensión y uso del Cálculo diferencial ante situaciones ligeramente distintas de las vistas en clase; el 88% reconoce claramente o admite que los propios profesores no dominan con seguridad suficiente el Calculo diferencial ante situaciones nuevas, y sólo el 22% se muestra seguro de sus conocimientos sobre cuándo y por qué usar el Cálculo diferencial en Física. Por su parte, los estudiantes reconocen también sus bajas expectativas y su renuncia a entender el Cálculo: el 63% de los estudiantes de COU (N=108), el 80% de los de primer curso universitario (N=116) y el 68% de los de 2º curso o superior (N=63) reconocen abiertamente o admiten que "*cuando se usa el Cálculo diferencial no presto atención pues sé de antemano que no me voy a enterar y atiendo solamente a la fórmula que se obtiene al final*".

Esta situación se haría insostenible si no fuese por la existencia de un acuerdo tácito entre profesores y estudiantes, percibido claramente por éstos últimos, según el cual, aunque el Cálculo diferencial se usa, el profesor no espera que sus alumnos lo entiendan, ni ellos mismos aspiran a comprenderlo.

Durante las entrevistas, los estudiantes y profesores en formación reconocieron la actitud mecánica que adoptan cuando usan el Cálculo diferencial, como se recoge en los siguientes extractos:

Extracto 9. Julia, profesora en formación

E: ¿Te enterabas cuando tus profesores o libros de Física usaban el Cálculo diferencial?

Julia: *Me enteraba de cómo se realizaba el cálculo, pero de lo que era no, nunca me he enterado*

Extracto 10. Juan, alumno de COU de *alto rendimiento*

Juan: *La verdad, cuando hay algunas integrales –por ejemplo, unas que tienen un "cerito" en medio que no sé de qué van- y las veo, pues no me las estudio porque puedo perder mucho tiempo tratando de comprenderlas.*

E: ¿Y las otras?

Juan: *Las que pillo rápido sí*

E: ¿Pero no decías que no sabías su significado?

Juan: *Sí, pero sé hacerlas*

Resultados que muestran que los profesores y estudiantes no valoran positivamente el uso del Cálculo diferencial en el aprendizaje de la Física

Como hemos puesto de manifiesto, el Cálculo diferencial se utiliza de forma mecánica en las clases de física, sin reflexión ni comprensión de lo que se hace, lo que genera inseguridad e impide usarlo con sentido. Es de esperar que, en estas condiciones, no se aprecie el importante papel de ayuda e impulso que el Cálculo diferencial juega en la Física, y sea valorado negativamente.

Hemos pedido a profesores y estudiantes que muestren su grado de acuerdo o desacuerdo, mediante una escala de tipo Likert, con varias proposiciones relacionadas con la valoración del uso del Cálculo diferencial. Más del 65% de los profesores y estudiantes de COU o 1º curso universitario reconocen claramente o admiten que el uso del Cálculo es un obstáculo para la comprensión y una importante fuente de rechazo hacia la Física. Resulta así que lo que debería acudir en ayuda de la comprensión física, acaba convirtiéndose -debido al uso incorrecto que habitualmente se hace- en un obstáculo que genera rechazo y actitudes negativas.

Esta valoración no se manifiesta con la misma rotundidad entre los estudiantes de 2º curso universitario, un resultado que consideramos lógico pues, habituados como están a identificar cualquier clase de Física con el uso del Cálculo diferencial, resulta impensable para ellos considerar la una sin el otro. No obstante, es preocupante que, a pesar de este condicionante, el 41% de estos alumnos siga admitiendo que el Cálculo es un obstáculo y una fuente de rechazo hacia la Física.

6. RESUMEN Y CONCLUSIONES

El estudio histórico y la *clarificación problematizadora* que hemos realizado nos ha permitido, por una parte, comprender las ideas y razonamientos intuitivos que se ponen en juego en la enseñanza habitual cuando se usa el Cálculo diferencial y, por otra parte, entender claramente la estrategia global, el sentido de cada uno de los pasos que se dan, y el significado de los conceptos fundamentales del Cálculo cuando se utiliza en las aplicaciones físicas. En particular, hemos mostrado que el concepto de diferencial como estimación lineal del incremento, aquella cuya pendiente coincide con la derivada, resulta adecuado para entender y dar sentido físico a las expresiones diferenciales, y al uso del Cálculo en general. Esta concepción de la diferencial es una concreción al caso de funciones de una variable de la definición formulada en 1911 por Fréchet, en el contexto del Análisis Funcional.

Como conclusión de este trabajo previo, hemos identificado sin ambigüedad un conjunto de indicadores de lo que sería una adecuada comprensión de la diferencial en la Física, que hemos utilizado para analizar racionalmente el uso habitual del Cálculo diferencial.

Hemos realizado nuestro análisis bajo la hipótesis de que todos y cada uno de esos indicadores están ausentes en la enseñanza habitual de la Física. Después de operativizar esa hipótesis en un conjunto de catorce consecuencias directamente contrastables, y de realizar un diseño experimental variado en el que se han visto implicados un alto número de profesores y estudiantes, los resultados que hemos obtenido avalan –de forma rotunda en la mayoría de los casos- la validez de la hipótesis.

Podemos afirmar, pues, que existe un uso mecánico y algorítmico del Cálculo en la enseñanza de la Física, despreocupado por la comprensión y el sentido de lo que se hace, que provoca una falta de confianza en su uso y un claro rechazo al mismo. Esta situación, a pesar de la existencia de un *acuerdo tácito* entre profesores y estudiantes, sería difícilmente sostenible sin la existencia de dos ideas fundamentales:

- la idea *intuitiva* -y errónea- de que, en el rango de lo infinitesimal, puede sustituirse el incremento exacto por una aproximación, sin cometer error alguno, de tal forma que la suma de trozos aproximados, infinitos trozos infinitesimales, acabará dando siempre el incremento exacto, sin importar la forma concreta de la aproximación.
- la apariencia de rigor y de que *funciona*, siempre se apliquen correctamente todas las reglas de Cálculo, para lo cual la expresión diferencial de partida correspondiente a cada situación se memoriza o se da por evidente. Todo el esfuerzo y atención se dedica así a la aplicación de reglas, lo que sirve para ocultar la escasa comprensión de lo que se hace e impide que se cuestione cómo se eligen las expresiones de partida.

El análisis que hemos realizado pone de manifiesto la necesidad de formular propuestas alternativas para la introducción y uso del Cálculo diferencial que promuevan una mejora en todos y cada uno de los indicadores. Aunque en ocasiones se opta por evitar el uso de la diferencial, realizando rodeos y buscando soluciones particulares para llegar a los mismos resultados, pensamos que esto no hace sino retrasar el problema. La cuestión principal no es que se introduzcan antes o después, sino que se haga bien cuando se empiece a usar el Cálculo diferencial, y también cuando se continúe usando, ya sea en el Bachillerato o en la Universidad.

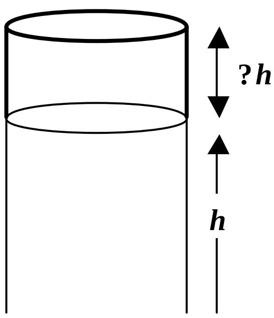
ANEXO: Problema físico resuelto en el que se aplica la clarificación realizada sobre el uso del cálculo diferencial en la Física.

Sabemos que la densidad de aire (?) disminuye con la altura (*h*) de acuerdo con la siguiente ecuación: **?=1,29·(1-0,000125·h)** Esa ecuación está escrita para el Sistema Internacional, es decir, si ***h*** se escribe en metros **?** se obtiene en kg/m^3 El valor *h*=0 corresponde al nivel del mar. **¿Cuál será la masa de una columna cilíndrica de aire de 1 m^2 de base y que se eleva desde el nivel del mar hasta 2000 m de altura?**

Planteamiento del problema. Justificación.

El volumen de una columna cilíndrica es: ***V=A·h***, y entonces su masa será: ***m*=?·A·*h*** Pero, la relación entre la masa de la columna y su altura no es lineal, pues ? no es constante. Por tanto, no podemos utilizar la expresión: ***m*=?·A·*h*** (ni tampoco: ***m*=?·*V***)

Nuestro problema consiste en averiguar la relación funcional entre la masa de la columna y su altura: ***m*(*h*)**; como sabemos una condición inicial: *m*(0)=0, ese problema es equivalente a averiguar la relación: ? *m*=f(? *h*). **Supuesta conocida la masa hasta cualquier altura *h*, ¿cuál es el ?*m* producido al pasar de *h* a *h*+?*h*?**



Significado de la diferencial

La primera respuesta sería: ? *m*=?·*A*·? *h*, pero ya hemos visto que ? no es constante en ese ?*h*, por muy pequeño que sea ? *h*. Podemos hacer, no obstante, **una estimación del ?*m* suponiendo que la densidad se mantuviese constante**, y escribimos: **d*m*=?·*A*·? *h***

Por ejemplo, cuando *h*=500 m (?=1,21 kg/m^3), y para un ? *h*=300 m, entonces: d*m*=362,8 kg Ese valor representa lo que cambiaría la masa, a partir de una altura de 500 m, al añadir un trozo de cilindro de 300 m de altura, si la densidad se mantuviese constante (si la masa aumentase de forma uniforme).

Otro ejemplo: cuando *h*=500 m, y para un ?*h*=100 m, entonces: d*m*=120,9 kg, que representa lo que cambiaría la masa, a partir de una altura de 500 m, al añadir un trozo de cilindro de 100 m de altura, si la densidad se mantuviese constante.

Como puede apreciarse, para una altura dada, d*m* cambia linealmente respecto a ?*h*. El cociente **d*m*/?*h*** es entonces el mismo sea cual sea el ?*h*, sólo depende de *h*: d*m*/? *h*=?·*A*, y representa lo que cambiaría la masa, a partir de esa altura, al incorporar un trozo de cilindro de altura unidad, si la masa cambiase uniformemente con la altura.

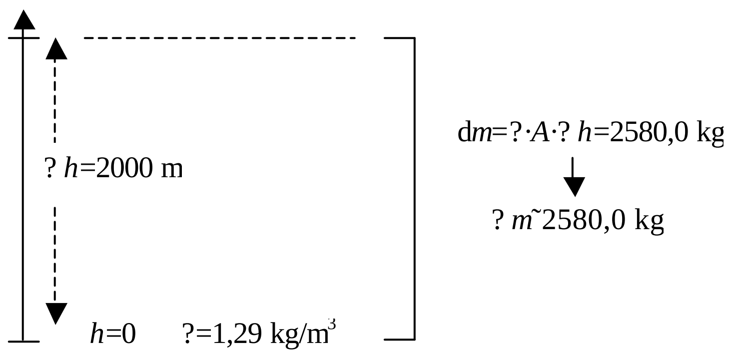
Pero, como es lógico, d*m* también depende de la altura. Así, por ejemplo, para *h*=1300 m (?=1,08 kg/m^3), y para un ? *h*=100 m, ahora d*m*=108,0 kg. Como puede apreciarse, d*m* no es lineal respecto a la altura (*h*).

Podemos afirmar entonces que la diferencial de masa: **d*m***, es una función de dos variables: la altura (*h*) a partir de la cual se va a considerar la densidad constante, y el cambio en la altura (? *h*) que se produce al incorporar el nuevo trozo de cilindro.

Cuando cambia la altura de la columna desde *h* hasta *h*+? *h*, ¿qué relación de orden existe entre el cambio de masa que realmente se produce (**? *m***) y la estimación que hemos aprendido a calcular (**d*m***)? Teniendo en cuenta que la densidad disminuye conforme aumenta la altura, y que al realizar la estimación hemos tomado el mayor valor, entonces: d*m*>? *m*.

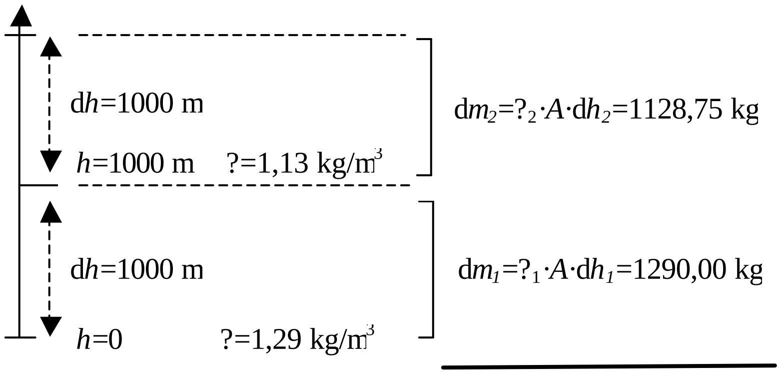
Búsqueda de valores aproximados. Cálculo numérico.

¿Cuál es la utilidad de la estimación realizada? En primer lugar, nos permite al menos adelantar un valor estimado. Si consideramos el trozo formado por toda la columna :



El error cometido al hacer esta aproximación es considerable, pues hemos supuesto la densidad constante cuando en realidad varía desde ?=1,29 kg/m^3 (h=0) hasta ?=0.97 kg/m^3 (h=2000 m).

Sin embargo, como la expresión diferencial adelantada (d*m*=?·*A*·? *h*) nos permite realizar estimaciones a partir de cualquier altura y para cualquier intervalo de altura, disponemos de un método para mejorar la estimación. Por ejemplo, podemos dividir la columna en dos trozos, realizar la estimación en cada uno de ellos, y después sumar. La altura de cada trozo la llamaremos: **d*h***, para distinguirlo del ? *h* total de 2000 m, y para recordar que vamos a realizar una estimación d*m* en cada uno de ellos. En este caso: **d*h*=? *h*/2**=1000 m.



? m˜ dm_1+dm_2=2418,75 kg

Podemos mejorar la estimación dividiendo la columna en 4 trozos: dh=? h/4=500 m

Primer trozo	h_1=0 ?$_1$=1,29 kg/m^3		dh_1=500 m	dm_1=645,00 kg
Segundo trozo	h_2=500 m ?$_2$=1,21 kg/m^3		dh_2=500 m	dm_2=604,69 kg
Tercer trozo	h_3=1000 m ?$_3$=1,13 kg/m^3		dh_3=500 m	dm_3=564,32 kg
Cuarto trozo	h_4=1500 m ?$_4$=1,05 kg/m^3		dh_4=500 m	dm_4=524,06 kg

? m˜ dm_1+dm_2+dm_3+dm_4=2338,13 kg

Si lo hiciésemos con 10 trozos:

? m˜ dm_1+dm_2+dm_3+dm_4+ dm_5+dm_6+dm_7+dm_8+ dm_9+dm_{10}=2289,75 kg

Si lo hic iésemos con **N** trozos: ? m ˜ dm_1 + dm_2 + dm_3 + ... + dm_N

Cada uno de esos sumandos (dm_i) representa una estimación de la masa de un trozo de columna, a partir de h_i, de altura dh (=2000/**N**), si la densidad se mantuviese constante a partir de esa h_i. Si ? m_i es la masa de ese trozo de columna, dm_i es siempre distinto (mayor) de ? m_i, cometiéndose un error en cada trozo: (? m_i-dm_i)

El error total (**E**) al hacer la estimación ? m de toda la columna, será:

E = (? m_1-dm_1) + (? m_2-dm_2) + (? m_3-dm_3) + ... + (? m_N-dm_N)

Búsqueda del resultado exacto. Integral y teorema fundamental.

Por muy grande que sea **N**, ninguno de esos sumandos se hace cero, y mucho menos **E** se hace cero. Por tanto, por muy grande que sea **N**, nunca la suma de dm_i conduce al valor exacto de la masa de la columna: ?m. Sin embargo, sabemos que **E** es menor cuanto menor sea **N**, y, si escogemos la diferencial adecuada, podremos acercarnos a cero tanto cuanto queramos. En ese caso, el límite de **E** cuando **N** tiende a infinito será cero, y podremos obtener el resultado exacto de ? *m*. Es decir:

$$? \, m = \lim_{N \to \infty} \left(dm_1 + dm_2 + dm_3 + \ldots + dm_N \right) \ \textbf{con la condición de que}: \ \lim_{N \to \infty} E = 0$$

Para que esa condición se cumpla, no basta con que cada uno de los sumandos (? m_i-dm_i) tienda a cero, pues al mismo tiempo el número de esos sumandos (**N**) tiende a infinito. Es preciso una condición más exigente: que el límite de N veces cualquiera de esos sumandos sea cero. Teniendo en cuenta la definición de integral, podemos decir entonces que:

$$? \, m = \int dm \quad \textbf{con la condición de que}: \ \lim_{N \to \infty} \left[N \cdot \left(? \, m - dm \right) \right] = 0$$

Teniendo en cuenta que d*h*=2000/**N**, ese enunciado es equivalente a afirmar que:

$$? \, m = \int dm \quad \textbf{con la condición de que}: \ \lim_{dh \to 0} \frac{? \, m - dm}{dh} = 0 \quad \forall \ h, dh$$

O, lo que es lo mismo:

$$? \, m = \int dm \quad \textbf{con la condición de que}: \ \lim_{dh \to 0} \frac{? \, m}{dh} = \frac{dm}{dh} \quad \forall \ h, dh$$

Si tenemos en cuenta la definición de derivada:

$$? \, m = \int dm \quad \textbf{con la condición de que}: \ m' = \frac{dm}{dh} \quad \forall \ h, dh$$

La expresión diferencial de partida era: **d*m*=?·*A*·d*h***, y por tanto el cociente diferencial es: **d*m*/d*h*=?·*A***. Por tanto, podemos llegar al resultado exacto si se cumple: *m*’=1,29·(1-0,000125·*h*)·*A* Esta condición nos permite obtener, además, el resultado de la integral sin necesidad de más cálculo numérico, aplicando reglas inversas a las del cálculo de derivadas (cálculo de antiderivadas o primitivas), resultando:

$$m(h) = 1{,}29 \cdot (h - 0{,}000125 \cdot h^2/2) \cdot \mathrm{A} + \mathrm{C}$$

La masa de la columna buscada será: ***M*** = *m*(2000) - *m*(0) = **2257,5 kg**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGHADIUNO, M.C.K. (1992): "Mathematics: history, philosophy and applications to science", *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 23 (5), 683-690.

ALEKSANDROV, A.D. *et al.* (1956): *La matemática: su contenido, métodos y significado*, Alianza Universidad, Madrid (7ª ed., 1985).

ALIBERT, D. *et al.* (1987): "Le thème 'Differentie lles' un exemple de coopération maths-physique dans la recherche", en *Actes du Colloque du GRECO Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques, Sêvres,* La Pensée Sauvage, Grenoble, 7-45.

APOSTOL, T.M. (1961): *Calculus. Vol 1*, Reverté, Barcelona (1965).

ARTIGUE, M. (1986): "The notion of differential for undergraduate Students in Science", en *Proceedings of the Xth Annual conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education*, Londres, 229-234.

ARTIGUE, M. (1989): « Le passage de la différentielle totale à la notion d'application linéaire tangente », en: *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire (Annexe I)*, IREM et LDPES, Université Paris 7.

ARTIGUE, M. y VIENNOT, L. (1987): "Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials", en *Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, Cornell (vol. III)*, Cornell University, Ithaca (USA).

AZCÁRATE, C. (1990): "La velocidad: introducción al concepto de derivada (Reseña de Tesis Doctoral)", *Enseñanza de las Ciencias*, 9 (2), 201-202.

BARTLE, R. (1996): "Return to the Riemann Integral", *The American Mathematical Monthly*, 103 (8), 625-632.

BOURBAKI, N. (1969): *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid (1972).

BREITENBERGER, E. (1992): "The mathematical knowledge of physics graduates: Primary data and conclusions", *American Journal of Physics*, 60 (4), 318-323.

CALVO, C. (1998): "Bases para una propuesta didáctica sobre integrales (Reseña de Tesis de Maestría)", *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (1), 194-195.

CAUCHY, A. L. (1821): *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique*, Edición Facsímil de la primera edición, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla (1998).

CONFREY, J. Y SMITH, E. (1994): "Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit", *Educational Studies in Mathematics*, 26, 135-164.

COTTRILL, J. *et al.* (1996): "Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme", *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-182.

DIEUDONNÉ, J. (1960): *Fundamentos de Análisis Moderno*, Reverté, Barcelona (1974).

EDWARDS, C.H. (1937): *The Historical Development of the* Calculus, Springer-Verlag, New York (1979).

EVES, H. (1981): *Great moments in Mathematics (After 1690)*, The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, nº 7, Washington, D.C.

FERRINI-MUNDY, J. Y GEUTHER GRAHAM, K. (1991): "An Overview of the Calculus Curriculum Reform Effort: Issues for Learning, Teaching, and Curriculum Development", *The American Mathematical Monthly*, 98 (7), 627-635.

FERRINI-MUNDY, J. Y GAUDARD, M. (1992): "Secondary school calculus: preparation or pitfall in the study of college calculus?", *Journal for Research in Mathematics Education*, 23 (1), 56-71.

FREUDENTHAL, M. (1973): *Mathematics as an educational task*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland.

GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (1992): *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Universidad, Madrid.

GOOD, R. (1991): "Editorial: Research on Science-Mathematics connections", *Journal of Research in Science Teaching*, 28 (1), 109.

GRAS MARTÍ, A., LÓPEZ-GAY, R., MTNEZ. TORREGROSA, J. y TORREGROSA, G. (2001) "On how to best introduce the concept of differential in physics", en *First International Girep Seminar Developing formal thinking in physics*, University of Udine, Italy. (En prensa).

JHONSON, K. (1995): "Harvard Calculus at Oklahoma State University", *The American Mathematical Monthly*, 102 (9), 794-797.

KLINE M. (1972): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, Madrid (1992).

LAUTEN, D., GRAHAM, K. y FERRINI-MUNDY, J. (1994): "Student Understanding of Basic Calculus Concepts: Interaction with the Graphics Calculator", *Journal of Mathematical Behavior*, 13, 225-237.

LAVALY, A. (1990): "Do students find physics easier to learn without mathematical problems?", *Physics Education*, 25, 202-204.

LÓPEZ DE LOS MOZOS, M.C. (1991): "Aproximación didáctica al concepto de derivada", *Revista Números,* 21, 7-14

LÓPEZ-GAY, R., MTNEZ. TORREGROSA, J. y GRAS MARTI, J. (2001 *a*): "What is the meaning and use of this expresion: $dN = a \cdot N \cdot t^2 \cdot dt$?", en *International Conference: Physics Teacher Education Beyond 2000. Selected Contributions,* R. Pintó & S. Surinach (eds.), Elsevier Editions, Paris.

LÓPEZ-GAY, R., MTNEZ. TORREGROSA, J. y GRAS MARTI, J. (2001 *b*): "Una propuesta alternativa para mejorar el uso del Cálculo diferencial en las clases de Física. Diseño experimental y resultados", *Enseñanza de las Ciencias, Número Extra, VI Congreso*, 335-336.

MARTIN, D. y COLEMAN, J. (1994): "Mathematics for mature student acces to HE courses in physics: the Coventry perspective", *Physics Education*, 29, 20-22.

MTNEZ. TORREGROSA, J., DOMÉNECH, J.L. y VERDÚ, R. (1994): "Del derribo de ideas al levantamiento de puentes: la epistemología de la ciencia como criterio organizador de la enseñanza en las ciencias física y química", *Revista de Enseñanza de la Física, 7* (2).

MTNEZ. TORREGROSA, J. y LÓPEZ-GAY, R. (1992): "La evolución del concepto de diferencial y la comprensión de su significado por profesores y alumnos", en *International Conference on History of the Physical-Mathematical Sciences and the Teaching of Sciences*, European Physical Society, Madrid, 132-136.

MTNEZ. TORREGROSA, J. y LÓPEZ-GAY, R. (1993): "El uso del Concepto de diferencial en la enseñanza de la Física", *Enseñanza de las Ciencias, Número Extra, IV Congreso*, 259-260.

MTNEZ. TORREGROSA, J. y LÓPEZ-GAY, R. (1997 *a*): "El uso del cálculo diferencial en la enseñanza de la física y química en el bachillerato: ¿una ayuda o un obstáculo?", *Enseñanza de las Ciencias, Número Extra, V Congreso*, 397-398.

MTNEZ. TORREGROSA, J. y LÓPEZ-GAY, R. (1997 *b*): "La introducción y uso del concepto de diferencial en los textos de física y química en el bachillerato: ¿favorece un aprendizaje con comprensión?", *Enseñanza de las Ciencias, Número Extra, V Congreso*, 399-400.

MTNEZ. TORREGROSA, J., LÓPEZ-GAY, R., GRAS MARTÍ, A. Y TORREGROSA, G. (en prensa) "La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la Física", *Enseñanza de las Ciencias* (admitido para publicación en 2001).

MONK, M. (1994): "Mathematics in physics education: a case of more haste less speed", *Physics Education*, 29 (4), 209-211.

NAGY, P., TRAUB, R.E., MACRURY, K., KLAIMAN, R. (1991): "High School Calculus: comparing the content off assignments and tests", *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (1), 69-75.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000): *Principle and Standards for Scholol Mathematics*, http://standards.nctm.org/document.

ORTON, A. (1983 *a*): "Students' understanding of integration", *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

ORTON, A. (1983 *b*): "Students' understanding of differentiation", *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

OSTEBEE, A. y ZORN, P. (1997): "Pro Choice", *The American Mathematical Monthly*, 104 (8), 728-730.

PARKER, B. (1994): "Maths in physics teaching", *Physics Education*, 29 (1), 1.

ROSSI, P. (1997): *El nacimiento de la ciencia moderna en Europa*, Crítica - Grijalbo Mondadori, Barcelona (1998).

SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. (1998): "Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto *límite de una función*: una perspectiva desde la noción de *obstáculo*", *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (1), 73-84.

SCHNEIDER, M. (1991): «Un obstacle épistémologique soulevé par des 'découpages infinis' des surfaces et des solides », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11 (23), 241-294.

SCHNEIDER, M. (1992): « A propos del l'apprentissage du taux de variation instantane », *Educational Studies in Mathematics*, 23, 317-350.

SWANN, H. (1997): "Commentary on Rethinking Rigor in Calculus: The Role of the Mean Value Theorem", *The American Mathematical Monthly*, 104 (3), 241-245.

THOMPSON, P.W. (1994): "Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus", *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274.

THOMPSON, P.W. y THOMPSON, A. (1994): "Talking about rates conceptually. Part I: Teacher's struggle", *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (3), 279-303.

TUCKER, T. (1997): "Rethinking Rigor in Calculus: The Role of the Mean Value Theorem", *The American Mathematical Monthly*, 104 (3), 231-240.

TURÉGANO, P. (1998): "Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo", *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (2), 233-249.

UNESCO (1975): "La interfase entre la Física y la Matemática", en *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Física, Vol. III*, 203-225.

WHITE, P. y MITCHELMORE, M. (1996): "Conceptual knowledge in introductory calculus", *Journal for Research in Mathematics Education,* 27 (1), 79-95.

WILLIAMS, S. (1991): "Models of limit held by College calculus students", *Journal for Research in Mathematics Education,* 22 (3), 219-236.